

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN



PROYECTO FIN DE CARRERA

# **INTERFAZ DE USUARIO DE SOFTWARE DE SÍNTESIS DE MULTIPLEXORES DE MICROONDAS PARA APLICACIONES ESPACIALES**



AUTOR: Jaime Noé Benito Casado  
TUTOR: Alejandro García Lampérez  
Madrid, 28 de Octubre de 2011



**Título:** Interfaz de usuario de software de síntesis de multiplexores de microondas para aplicaciones espaciales.

**Autor:** Jaime Noé Benito Casado

**Tutor:** Alejandro García Lampérez.

## EL TRIBUNAL

**Presidente:** Daniel Segovia Vargas

**Vocal:** Francisco Aznar Ballesta

**Secretario:** Sergio Llorente Romano

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera el día 28 de Octubre de 2011 en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE

*Hasta el camino más largo empieza por dar el primer paso.*

Confucio.



# Agradecimientos

A mi tutor Alejandro por todo el tiempo que me has dedicado incluso cuando éste escaseaba y por todo lo que he aprendido de ti, tanto como alumno en tus clases como durante la realización del proyecto.

A mis padres por su apoyo, paciencia y comprensión mostrada a lo largo de la carrera. Y a mis hermanos con quienes también he compartido muchos días de biblioteca y de buenos momentos.

A mi novia Rocío por hacer que los días duros fueran menos duros, por los buenos ratos pasados juntos y porque desde que te conocí me ha ido mejor en la vida y en la carrera.

A mi compañero de prácticas a lo largo de toda la carrera y buen amigo José, así como al resto de mis compañeros y amigos de clase: Xavi, Isma, Rober, Barco, Baltasar, Alfonso, Dani, Álvaro, Jhony, María, Diana, Estefanía, Marian, Marta y todos los demás con quienes ir a clase y hacer todas las prácticas se me ha hecho mucho más ameno y divertido.

A mis amigos de siempre y a veces también compañeros de biblioteca Miguel, Marco, Sergio y todos los demás.

A los profesores de mi universidad Carlos III con los que he tenido la oportunidad de asistir a sus clases y de aprender la mayoría de mis conocimientos.



# Resumen

El presente documento realiza un breve estudio de los multiplexores de microondas así como de sus distintos métodos de síntesis (analítica y optimización). A continuación se ilustrará el proceso para el desarrollo de un nuevo tipo de síntesis que une las ventajas de los dos anteriores. Adicionalmente se desarrollará un conjunto de interfaces que facilitarán la interacción de los usuarios con el programa encargado de la síntesis.

Los métodos de síntesis de multiplexores producen como resultado matrices de acoplamientos y topologías. Estas topologías están relacionadas con el diseño físico de la red, por lo que se deberán evitar los cruces entre acoplamientos. Por este motivo será condición necesaria, aunque no suficiente, que las topologías puedan ser representadas mediante grafos planos.

Aunque las topologías se corresponden con las matrices de acoplamiento obtenidas mediante síntesis, existe la posibilidad de especificar una topología arbitraria. Adicionalmente será posible transformar las matrices de acoplamientos en otras similares mediante transformaciones de semejanza tales como las rotaciones de Givens o truncar coeficientes de esta matriz para conseguir topologías realizables, si bien esto último tiene el inconveniente de distorsionar la respuesta en frecuencia final.

El programa software encargado de la síntesis de multiplexores es bastante complejo por lo que se ha desarrollado un sencillo interfaz que facilita la interacción con los usuarios, permitiéndoles especificar nuevos parámetros, usar unos ya existentes o utilizar unos valores “típicos” correspondientes con los usados en aplicaciones espaciales.

Finalmente se analizarán los resultados obtenidos de los distintos métodos de síntesis para varios tipos de multiplexores.

Para la realización de todas las simulaciones se ha utilizado el programa software de MATLAB® así como su herramienta GUI para la implementación de las interfaces.

**Palabras clave:** Filtros de microondas, filtro paso banda, multiplexores de microondas, matriz de acoplamientos, topología, rotaciones de Givens, síntesis analítica, síntesis por optimización.



# Abstract

This document carries out a brief review of microwave multiplexers and their different methods of synthesis (analytical and optimization). Additionally it will be develop a new type of synthesis which combines the advantages of the two previous methods. In addition a set of interfaces will be developed in order to ease the interaction between users and the program responsible for the synthesis.

The result of the synthesis of multiplexers is the coupling matrix and their correspondent topology. These topologies are related to the physical design of the network, therefore cross-couplings should be avoided. For this reason it will necessary but not sufficient condition that these topologies could be represented by planar graphs.

Although topologies correspond to coupling matrices obtained by synthesis, it is possible to specify another arbitrary topology. Additionally it will be possible to transform coupling matrices using similarity transformations, such as Givens rotations, or truncating some coefficients in order to obtain feasible topologies, although the latter has the disadvantage of distorting the final frequency response.

The software multiplexers' synthesis program is highly complex therefore to ease the interaction with users, a simple interface has been designed which simplify the entire process. This interface will allow users to specify new parameters, using some existing ones or use a "typical" values corresponding to those used in space applications.

To conclude, the results of the entire process will be analyzed for each different synthesis method and for some types of multiplexers.

To perform all the simulations we used the MATLAB® software program and its GUI tool for carrying out the set of interfaces.

**Keywords:** microwave filters, band pass filters, microwave multiplexers, coupling matrix, topology, Givens rotations, analytical synthesis, optimization synthesis.



# Índice

1.	Introducción y objetivos .....	1
1.1	Introducción .....	1
1.2	Objetivos .....	2
1.3	Fases del desarrollo .....	3
1.4	Medios empleados.....	3
1.5	Estructura de la memoria.....	3
2.	Conceptos básicos.....	7
2.1	Introducción .....	7
2.2	Filtros: definición y conceptos básicos .....	7
2.2.1	Características de los filtros .....	8
2.2.2	Proceso de diseño de un filtro:.....	11
2.2.2.1	Especificaciones del filtro: .....	11
2.2.2.2	Diseño del prototipo paso bajo:.....	11
2.2.2.3	Escalado y conversión: .....	12
2.2.2.4	Implementación: .....	13
2.2.3	Filtro paso banda .....	13
2.3	Parámetros de Scattering.....	15
2.4	Polinomios característicos.....	16
2.5	Resonadores y acoplamientos .....	17
2.5.1	Resonadores .....	17
2.5.2	Acoplamientos .....	18
2.6	Inversores de impedancia y de admitancia.....	19

2.6.1	Inversor de impedancia .....	19
2.6.2	Inversor de admitancia .....	20
2.7	Matriz de acoplamientos .....	21
2.8	Síntesis de la matriz de acoplamientos transversal “ $N+2$ ” .....	22
2.8.1	Síntesis mediante polinomios de transferencia y reflexión.....	23
2.8.1.1	Cálculo de $\varepsilon$ y $\varepsilon_R$ en funciones de filtrado canónicas completas .....	24
2.8.2	Síntesis mediante la aproximación circuital.....	27
2.8.2.1	Particularización para funciones de filtrado canónicas completas .....	29
2.8.2.2	Síntesis de la matriz de admitancias $[Y_N]$ .....	32
2.8.3	Síntesis completa de la matriz transversal “ $N+2$ ” .....	35
2.8.3.1	Características de transferencia y reflexión a partir de la matriz “ $N+2$ ” ....	37
2.8.4	Propiedades .....	38
2.9	Multiplexor de microondas: .....	39
3.	Operaciones matriciales.....	41
3.1	Introducción .....	41
3.2	Método analítico de síntesis .....	42
3.2.1	Parámetros de admitancia en cortocircuito .....	42
3.2.2	Expansión en fracciones parciales de los parámetros de admitancia.....	45
3.2.2.1	Condiciones de realizabilidad .....	46
3.2.3	Redes con topología transversal y número arbitrario de puertos .....	46
3.2.4	Matriz de parámetros de admitancia de redes transversales .....	47
3.2.5	Identificación de coeficientes de la matriz de admitancia .....	50
3.2.5.1	Término de orden cero .....	51
3.2.5.2	Término de orden uno .....	51
3.2.6	Algoritmo de síntesis de redes transversales.....	55
3.2.7	Transformación de la matriz de acoplamientos .....	56
3.3	Redes semejantes.....	56
3.4	Transformaciones de semejanza.....	60
3.4.1	Rotaciones de Givens.....	61
3.4.1.1	Ejemplo de rotaciones de Givens .....	63
3.5	Grafos planos.....	65
3.5.1	Teorema de Kuratowski .....	65
3.6	Representación de matrices de acoplamiento.....	67



3.6.1	Representación de redes transversales .....	69
3.6.2	Representación de redes no transversales .....	71
3.7	Conclusiones .....	75
4.	Síntesis de multiplexores .....	77
4.1	Introducción .....	77
4.2	Síntesis analítica.....	78
4.2.1	Ejemplos.....	79
4.2.1.1	Diplexor.....	79
4.2.1.2	Triplexor con unión distribuida.....	89
4.2.1.3	Multiplexor de 10 canales de orden 4 .....	92
4.2.2	Conclusiones .....	93
4.3	Síntesis por optimización .....	94
4.3.1	Funciones de error cuadráticas.....	95
4.3.1.1	Función de error basada en módulo .....	96
4.3.1.1.1	Gradiente de la función de error .....	96
4.3.2	Proceso de optimización .....	97
4.3.3	Ejemplos.....	98
4.3.3.1	Diplexor.....	98
4.3.3.2	Triplexor con unión distribuida.....	101
4.3.3.3	Multiplexor de 6 canales de orden 7 .....	103
4.3.4	Conclusiones .....	105
4.4	Síntesis analítica - optimización.....	105
4.4.1	Ejemplos.....	106
4.4.1.1	Diplexor.....	106
4.4.1.2	Triplexor con unión distribuida.....	110
4.4.2	Conclusiones .....	113
4.5	Conclusiones .....	113
5.	Interfaz de usuario .....	115
5.1	Introducción .....	115
5.2	Funcionamiento general .....	116
5.2.1	Opción de datos nuevos .....	116
5.2.2	Opción de cargar datos.....	121
5.2.3	Opción de cargar datos por defecto.....	123

5.2.4	Especificar una nueva topología .....	123
5.3	Conclusiones .....	126
6.	Epílogo y líneas futuras .....	127
6.1	Conclusiones .....	127
6.2	Líneas de trabajo futuras .....	129
6.2.1	Construcción de topologías realizables físicamente .....	129
6.2.2	Mejora del interfaz de construcción de topologías .....	131
7.	Presupuesto .....	133
8.	Bibliografía .....	137

# Índice de Figuras

Figura 1: Proceso de diseño de un filtro .....	11
Figura 2: Prototipo paso bajo de un filtro de Butterworth .....	12
Figura 3: Tablas con los valores de los elementos gn de los prototipos paso bajo .....	12
Figura 4: Resumen de transformaciones de filtros .....	12
Figura 5: Ejemplo de un circuito de un filtro paso banda .....	13
Figura 6: Respuesta en frecuencia de un filtro paso banda .....	14
Figura 7: Respuesta en frecuencia de un filtro paso banda ideal .....	14
Figura 8: Modelo circuital de un resonador con pérdidas .....	18
Figura 9: Circuito resonante de factor Q .....	18
Figura 10: Inversor de impedancias .....	19
Figura 11: Transformador de $\lambda/4$ equivalente a un inversor de impedancias .....	19
Figura 12: Transformaciones equivalentes usando inversor de impedancias .....	20
Figura 13: Inversor de admitancia .....	20
Figura 14: Transformador de $\lambda/4$ equivalente a un inversor de admitancias .....	20
Figura 15: Transformaciones equivalentes usando inversor de impedancias .....	21
Figura 16: Red de N resonadores transversales incluyendo el acoplo directo fuente/carga $M_{SL}$ .....	28
Figura 17: Sección paso bajo k-ésima .....	28
Figura 18: Sección paso bajo equivalente a frecuencias infinitas .....	29
Figura 19: Único camino posible entre fuente y carga .....	29
Figura 20: Circuito equivalente del array transversal cuando $s = \pm j \cdot \infty$ .....	29

Figura 21: Sección k-ésima.....	32
Figura 22: Etapas para el cálculo de la matriz ABCD.....	32
Figura 23: Matriz transversal $N+2$ .....	37
Figura 24: Resonador con todos los puertos cortocircuitados, salvo dos ( $i$ y $j$ ) .....	48
Figura 25: Red de acoplamientos con todos los puertos cortocircuitados salvo dos, ( $i$ y $j$ ) .....	49
Figura 26: Grafo no plano $K_{3,3}$ .....	65
Figura 27: Grafo no plano $K_5$ .....	65
Figura 28: Grafo de Petersen (no plano).....	66
Figura 29: Topología de red no implementable físicamente .....	68
Figura 30: Notación empleada para la representación de topologías .....	68
Figura 31: Diagrama de nodos y acoplamientos de una red transversal con 2 canales de orden 3.....	71
Figura 32: Representación de una red no transversal de 2 canales de orden 5.....	73
Figura 33: Representación alternativa de una red no transversal de 2 canales de orden 5	74
Figura 34: Representación alternativa no realizable de una red no transversal de 2 canales de orden 5.....	74
Figura 35: Topología transversal de un diplexor .....	80
Figura 36: Respuesta en frecuencia objetivo del diplexor .....	81
Figura 37: Topología especificada realizable de un diplexor con dos canales de cuarto orden.....	82
Figura 38: Respuesta de la síntesis analítica tras las rotaciones de Givens .....	82
Figura 39: Matriz de acoplamientos tras las rotaciones.....	83
Figura 40: Respuesta en frecuencia tras las aproximaciones por valor de umbral .....	84
Figura 41: Topología resultante tras usar umbral alto .....	85
Figura 42: Respuesta en frecuencia tras rotaciones y truncamientos para un umbral alto	85
Figura 43: Topología resultante tras utilizar umbral muy alto .....	86
Figura 44: Respuesta en frecuencia tras utilizar un umbral demasiado alto.....	86
Figura 45: Topología de red tras utilizar un bajo valor de umbral .....	87
Figura 46: Respuesta en frecuencia tras utilizar un bajo valor de umbral .....	87
Figura 47: Topología de red realizable usando valores de compromiso de umbral .....	88
Figura 48: Representación alternativa de una topología realizable para un valor de umbral adecuado.....	88

Figura 49: Respuesta en frecuencia con valor de umbral intermedio .....	89
Figura 50: Distribución de nodos y acoplamientos para un triplexor con unión distribuida. Línea continua: acoplamientos dentro de un canal. Línea discontinua: acoplamientos entre canales.....	90
Figura 51: Respuesta en frecuencia ideal para un triplexor con unión distribuida.....	90
Figura 52: Topología resultante de la síntesis analítica ideal para un triplexor.....	91
Figura 53: Topología de un triplexor con todos sus acoplamientos .....	91
Figura 54: Transmisión y reflexión en el puerto común para un triplexor con unión distribuida.....	92
Figura 55: Respuesta en frecuencia para un multiplexor de 10 canales de orden 4 .....	93
Figura 56: Topología de un diplexor de orden 4.....	98
Figura 57: Respuesta en frecuencia objetivo para un diplexor con canales de orden 4.....	99
Figura 58: Respuesta en frecuencia usando la síntesis por optimización para un diplexor con canales de orden 4 .....	99
Figura 59: Respuesta en frecuencia utilizando la síntesis analítica y la topología de la figura 33 .....	100
Figura 60: Respuesta en frecuencia de la síntesis analítica truncada para un diplexor con la topología de la figura 52 .....	100
Figura 61: Topología principal para un triplexor con unión distribuida.....	101
Figura 62: Respuesta en frecuencia objetivo del triplexor.....	102
Figura 63: Respuesta en frecuencia de la síntesis por optimización para un triplexor con unión distribuida .....	102
Figura 64: Respuesta en frecuencia síntesis analítica truncada para la topología especificada .....	103
Figura 65: Topología de un multiplexor de 6 canales de orden 7.....	104
Figura 66: Respuesta en frecuencia para un multiplexor de 6 canales de orden 7 .....	104
Figura 67: Topología sencilla para un diplexor con canales de orden 4.....	106
Figura 68: Respuesta objetivo de un diplexor con canales de orden 4 .....	107
Figura 69: Respuesta en frecuencia tras síntesis analítica con rotaciones y truncamientos utilizando un diplexor con una topología sencilla .....	107
Figura 70: Respuesta del diplexor tras la síntesis analítica-optimización .....	108
Figura 71: Respuesta en frecuencia del diplexor utilizando síntesis por optimización ...	108
Figura 72: Topología válida para un diplexor con canales de orden 4 .....	109
Figura 73: Respuesta en frecuencia tras aplicar la síntesis analítica con rotaciones y truncamientos utilizando una topología más adecuada.....	109

Figura 74: Respuesta en frecuencia tras utilizar la síntesis analítica-optimización usando la topología de la figura 72 .....	110
Figura 75: Topología para el triplexor con unión distribuida .....	110
Figura 76: Respuesta objetivo del triplexor .....	111
Figura 77: Respuesta de un triplexor usando síntesis analítica tras rotaciones y truncamientos .....	111
Figura 78: Respuesta en frecuencia de la síntesis por optimización para un triplexor con unión distribuida .....	112
Figura 79: Respuesta final del triplexor con unión distribuida tras síntesis analítica – optimización.....	112
Figura 80: Interfaz principal .....	116
Figura 81: Interfaz de nuevos datos para 6 canales .....	117
Figura 82: Aviso debido a truncamiento del orden del canal .....	119
Figura 83: Mensaje de error debido a valor de frecuencia central introducida errónea ..	120
Figura 84: Ruta y nombre a especificar por el usuario para guardar los datos.....	121
Figura 85: Ruta y nombre del archivo que desea cargar el usuario .....	121
Figura 86: Interfaz rellena con los datos cargados.....	122
Figura 87: Interfaz para especificar una nueva topología para dos canales de orden cuatro .....	124
Figura 88: Diagrama de Gantt del proyecto de Síntesis de multiplexores de microondas .....	134

# Índice de Tablas

Tabla 1: Valores de los coeficientes de acoplamientos de las redes transversales .....	55
Tabla 2: Especificaciones del diplexor .....	79
Tabla 3: Especificaciones del triplexor con unión distribuida.....	90
Tabla 4: Especificaciones del multiplexor de 10 canales de orden 4 .....	93
Tabla 5: Especificaciones del diplexor con canales de orden 4 .....	98
Tabla 6: Especificaciones del triplexor con unión distribuida.....	101
Tabla 7: Especificaciones de un multiplexor de 6 canales de orden 7.....	103
Tabla 8: Especificaciones del diplexor con canales de orden 4 .....	106
Tabla 9: Especificaciones del triplexor con unión distribuida.....	111





# Capítulo 1

## Introducción y objetivos

### 1.1 Introducción

Este proyecto se puede dividir en dos partes. La primera de ellas consistirá en el estudio de los multiplexores de microondas así como en el análisis e interpretación de los resultados obtenidos en función de las especificaciones. Adicionalmente se realizarán varias comparaciones de los resultados entre los distintos métodos de síntesis empleados. Por otro lado, la segunda parte se centrará en el desarrollo de una interfaz de usuario para la introducción de las especificaciones de los multiplexores de microondas.

En referencia a la segunda parte, la interfaz de usuario se desarrollará sobre la plataforma software de MATLAB®, en concreto usando las denominadas herramientas GUI (Graphical User Interface), ya que el programa principal sobre el que se ejecuta toda la aplicación está desarrollado sobre MATLAB. Aunque el programa interno de síntesis de multiplexores es bastante complejo, la interfaz será sencilla y de uso intuitivo. En general se requerirá que los usuarios posean cierto grado de conocimiento acerca de los valores de los parámetros que los multiplexores pueden soportar si bien existirá la posibilidad de usar unos valores por defecto sin más que especificar el número de canales que se desean.

Las especificaciones que los usuarios deberán introducir se corresponden con el número de canales, la frecuencia central, el ancho de banda, el orden, el valor de rizado y los ceros de transmisión.

En general se utilizarán las bandas de frecuencia de 10 ó 12 GHz como frecuencias centrales (correspondientes a la banda de microondas  $K_u$ ) ya que esta banda es la que se usa principalmente en las comunicaciones satelitales. En Europa, se usan de 10.7 a 12.5 GHz en la banda  $K_u$  de microondas para servicios de broadcasting y el ancho de banda de los canales estará en torno a los 30 MHz. Sin embargo, los resultados obtenidos son generalizables a otras frecuencias y anchos de banda.

Los multiplexores de microondas tendrán un comportamiento selectivo en frecuencia que se logrará mediante el uso de elementos resonantes, o simplemente resonadores, acoplados entre sí electromagnéticamente [4,6]. La estructura y valores de los acoplamientos quedan determinados mediante una matriz, denominada matriz de acoplamientos.

Existen dos tipos principales de síntesis de multiplexores: síntesis analítica y síntesis por optimización. En el presente documento se analizarán las ventajas y desventajas de cada una de ellas. Las matrices de acoplamiento resultantes de los procesos de síntesis serán en algunos casos, no realizables físicamente, por ello habrá que recurrir a transformaciones de semejanza y distintas aproximaciones para conseguir redes que puedan ser construidas. Finalmente se estudiará un método de síntesis conjunto que aunaré las ventajas de los dos anteriores.

## 1.2 Objetivos

El objetivo de este proyecto es la implementación de una interfaz de usuario de un programa ya existente de síntesis de multiplexores compactos de microondas para la carga útil de satélites de comunicaciones. Adicionalmente se implementará un método de síntesis conjunto que aúne las ventajas de la síntesis analítica y de la síntesis por optimización. Se desarrollarán dos funcionalidades:

- Por un lado, la implementación de una interfaz que permita la introducción y control de las especificaciones por parte de los usuarios (número de canales, frecuencia central, ancho de banda, orden, valor de rizado y posiciones de los ceros de transmisión para cada uno de los canales).
- Por otro lado, la presentación y análisis de los resultados de la redes sintetizadas, así como de sus prestaciones (gráficos de la respuesta en frecuencia, representación del diagrama de nodos y acoplamientos, comparaciones entre los distintos métodos de síntesis, etc). Adicionalmente se estudiará las ventajas del nuevo proceso de síntesis conjunta.

## 1.3 Fases del desarrollo

Las fases del desarrollo de este proyecto han sido las siguientes:

- Estudio del programa ya existente de síntesis de multiplexores compactos de microondas.
- Desarrollo de la interfaz GUI de usuario para el programa de síntesis de multiplexores.
- Implementación de técnicas auxiliares para conseguir redes realizables físicamente.
- Desarrollo de un método conjunto de síntesis analítica y por optimización.
- Simulación de los distintos tipos de redes, comparación de resultados para cada uno de los procesos de síntesis.
- Conclusiones

## 1.4 Medios empleados

Para el desarrollo de este proyecto se ha utilizado la herramienta software MATLAB®, tanto de la versión estándar que da soporte al programa principal, como de la herramienta GUI (Graphical User Interface) para el desarrollo de la interfaz que sustenta al mencionado programa.

## 1.5 Estructura de la memoria

Para facilitar la comprensión de la memoria, a continuación se incluye un breve resumen del contenido de cada capítulo.

### Capítulo 1

En este primer capítulo se presenta una breve introducción del tema a tratar (sección 1.1), los objetivos que se esperan conseguir (sección 1.2), las fases del desarrollo (sección 1.3) y los medios empleados para conseguir esos objetivos (sección 1.4). Adicionalmente contiene un breve resumen del resto de los capítulos (sección 1.5).

### Capítulo 2

Este capítulo está dedicado a la introducción de los conceptos básicos necesarios para la comprensión completa del proyecto.

Se comenzará con la definición, características y proceso de diseño de los filtros, centrándose especialmente en un tipo particular de éstos, los filtros paso banda (sección 2.2). Se continuará con la definición de los parámetros S (*Scattering* o de dispersión) en la sección 2.3, así como de los denominación de los llamados polinomios característicos (sección 2.4). Posteriormente se explicarán dos de los elementos de los que están formados los multiplexores, los resonadores y acoplamientos (sección 2.5), continuando con la definición de los inversores de impedancia y de admitancia (sección 2.6).

A continuación se explicará que es la matriz de acoplamientos (sección 2.7), así como su proceso de síntesis mediante el método conocido como “N+2” (sección 2.8).

Finalmente se realizará una breve introducción al concepto de multiplexor de microondas (sección 2.9).

### Capítulo 3

En este capítulo se explicará el método analítico de síntesis de multiplexores (sección 3.2) así como el concepto de las redes semejantes (sección 3.3) y el método para obtenerlas a partir de las transformaciones de semejanza (sección 3.4) tales como las rotaciones de Givens.

Por otro lado, dado que las redes deberán ser realizables, será condición necesaria, aunque no suficiente, que pueda ser representada mediante un grafo plano (sección 3.5).

Finalmente se explicará brevemente el método elegido para la representación de topologías, tanto transversales como no transversales (sección 3.6) y se terminará con unas conclusiones (sección 3.7).

### Capítulo 4

En este cuarto capítulo se explicará brevemente el funcionamiento de la síntesis de multiplexores (sección 4.1) y posteriormente se realizará un estudio de los métodos principales de síntesis, es decir, de la síntesis analítica (sección 4.2) y de la síntesis por optimización (sección 4.3). Adicionalmente se ilustrarán varios ejemplos para cada uno de los métodos y se compararán los resultados de ambos procesos, explicando las ventajas y desventajas de cada uno de ellos. Además se propondrá un nuevo proceso de síntesis con el objetivo de aunar las ventajas de cada uno de los métodos anteriores (sección 4.4) ya que la síntesis analítica rara vez proporcionará topologías realizables físicamente. Finalmente se terminará con las conclusiones más relevantes (sección 4.5).

## **Capítulo 5**

Este capítulo está dedicado a la descripción completa de la interfaz de usuario que interacciona con el programa principal de síntesis de multiplexores (sección 5.15.1), para lo cual se hará uso de varios ejemplos que recorrerán todas sus posibilidades (sección 5.2). Se concluirá con algunas reflexiones (sección 5.3).

## **Capítulo 6**

En este capítulo se presentarán las conclusiones finales de todo el proyecto así como un breve resumen de todos los resultados obtenidos (sección 6.1). Finalmente se presentarán las líneas futuras de investigación (sección 6.2).

## **Capítulo 7**

Este último y breve capítulo está dedicado al estudio del presupuesto necesario para la realización del proyecto.



# Capítulo 2

## Conceptos básicos

### 2.1 Introducción

El objetivo de esta sección es recordar al lector aquellos conceptos básicos necesarios para la posterior comprensión del funcionamiento de la síntesis de multiplexores.

Como se ha mencionado con anterioridad uno de los objetivos principales de este proyecto es la síntesis de multiplexores. Estos multiplexores estarán formados por estructuras que tienen prácticamente el mismo comportamiento que los filtros de microondas, por este motivo a continuación se realizará una breve introducción a estos conceptos básicos.

### 2.2 Filtros: definición y conceptos básicos

Un filtro es un dispositivo con una respuesta selectiva en frecuencia, esto es que discrimina una determinada frecuencia o gama de frecuencias (bandas de frecuencia) de una señal que pasa a través de él, pudiendo modificar tanto su amplitud como su fase.

Los filtros pueden ser de distintos tipos, siendo los más habituales: paso alto, paso bajo, paso banda o banda eliminada.

Puesto que un multiplexor presenta bandas de paso similares a las de varios filtros paso banda, en este capítulo nos centraremos en este tipo de filtros. (Las características de los demás tipos de filtros aparecen especificadas en una extensa bibliografía, como por ejemplo, en [10]).

## 2.2.1 Características de los filtros

Las características más importantes de los filtros y que nos ayudarán a comprender mejor el funcionamiento de estos dispositivos aparecen mostradas a continuación. Algunas de estas características serán los datos de entrada que los usuarios deberán introducir como punto de partida del programa y que servirán para el desarrollo de los distintos procesos de síntesis, mientras que el resto se calcularán como consecuencia de las anteriores.

1. **Frecuencia central ( $f_0$ ):** Se define como aquella frecuencia que se encuentra situada en el centro de la banda de paso del filtro. Generalmente será donde la señal alcance su mayor valor.
2. **Ancho de banda (BW):** Como su propio nombre indica es la anchura de la banda de paso, es decir donde la señal no se encontrará atenuada. En este conjunto de frecuencias es donde se encuentra concentrada la mayor energía de la señal.
3. **Frecuencia de corte ( $f_c$ ):** Son aquellos puntos frecuenciales donde la ganancia del filtro será 3 dB inferior a la máxima ganancia (que se alcanza a la frecuencia central). Para el caso que nos ocupa de filtros paso banda, tendremos una frecuencia de corte inferior y otra superior. Dado que en general el ancho de banda y la frecuencia central serán conocidas éste dato puede ser obtenido a partir de los anteriores, ya que éstos están relacionados mediante las siguientes ecuaciones:

$$BW = f_H - f_L \quad (2.1)$$

$$f_0^2 = f_H \cdot f_L \quad (2.2)$$

4. **Factor de calidad (Q) (o de sobretensión):** Mide la relación existente entre la energía media almacenada en el circuito y la energía perdida por segundo, es decir, cumple con la siguiente ecuación: [3,4]

$$Q = \omega \cdot \frac{\text{energía media almacenada}}{\text{energía disipada por segundo}} = \omega \frac{W_m + W_e}{P_{loss}} \quad (2.3)$$

Dado que la energía almacenada en los resonadores es única, la variación del factor de calidad irá ligada a la variación de las pérdidas que pueda haber.



Si pudieran separarse los efectos de las pérdidas dependiendo de si la causa fuera interna o externa al circuito tendríamos 3 tipos distintos de factores de calidad:

1. Factor de calidad aislado o en el vacío ( $Q$ ): las pérdidas se deben exclusivamente al circuito resonador.
2. Factor de calidad exterior ( $Q_{ext}$ ): las pérdidas se deben a los circuitos exteriores a los que se conecta el resonador. Los  $Q_{ext}$  son en realidad otra manera de especificar los acoplamientos de entrada/salida. Hay tantos factores de calidad externos como conexiones del resonador tengamos al exterior. Así se pueden clasificar los resonadores por su conexión:
  - Resonadores a reflexión: solo existe un terminal que aporta energía al resonador. Tiene una configuración tipo dipolo y hay un solo  $Q_{ext}$ .
  - Resonadores a transmisión: se aporta energía al resonador por un terminal y se extrae por otro. Tiene una configuración tipo cuadripolo y hay dos  $Q_{ext}$ :  $Q_{ext1}$  y  $Q_{ext2}$ .
3. Factor de calidad cargado ( $Q_L$ ): incluye todos los efectos de pérdidas, tanto internos como externos, por lo que es el único que se puede medir. Si la energía almacenada es común y las pérdidas han podido separarse, el factor de calidad cargado, que es el que puede medirse, está relacionado con los otros dos tipos de factores de calidad mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q_{ext1}} + \frac{1}{Q_{ext2}} \quad (2.4)$$

5. **Pérdidas de Retorno (*Return Loss*):** es la diferencia entre la potencia de la señal transmitida y la potencia de las reflexiones de la señal.
6. **Rizado (*Ripple*):** Se define como la variación periódica de las pérdidas de inserción con respecto a la frecuencia de un filtro o de una red de dos puertos.
7. **Atenuación en la banda atenuada.** Aunque idealmente la atenuación en la banda atenuada debería ser infinita, ya que solamente queremos transmisión en la bandas de paso, en la práctica este valor será grande pero no infinito.
8. **Orden del filtro ( $n$ ):** Este parámetro vendrá dado por el número de resonadores actuando como tales. Además coincidirá con el número de ceros de la respuesta de reflexión del parámetro  $S_{11}$ .
9. **Retardo de grupo:** Este parámetro vendrá determinado por los coeficientes de transmisión (para este caso trivial, el  $S_{21}$ ). El retardo de grupo ( $\tau(\omega)$ ) se medirá en segundos, y sirve para indicar el retardo que sufre cada componente espectral de la señal al pasar por el filtro.

El retardo de grupo se puede definir como:

$$\tau(\omega) = \frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial \omega} \quad (2.5)$$

Donde  $\varphi(\omega)$  es la fase de  $S_{21}$ .

Para que el retardo de grupo sea constante en la banda de paso es necesario que la fase de  $S_{21}$  sea lineal en dicha banda ya que de esta manera evitaremos la dispersión espectral de la señal. Sin embargo, hay que tener en cuenta, que en general, se necesitarán filtros muy selectivos, lo que implica que cuanto más selectivo sea un filtro, menos constante será su retardo de grupo, por lo que existirá un compromiso entre la distorsión de fase y la selectividad de la respuesta en amplitud, de modo que cuanto mayor sea la respuesta en amplitud, mayor será la distorsión de fase y cuanto menor sea la distorsión de fase, menos selectivo será el filtro.

**10. Ceros de transmisión:** Son los valores de frecuencia en los que no se transmite la señal, por lo tanto, la atenuación de  $S_{21}$  (o de  $S_{31}, S_{41}, \dots$  para el caso de los multiplexores) tomará un valor muy alto ( $S_{21} = 0$ ). Para diseñar el filtro será muy importante determinar la posición de estos ceros de transmisión, pues de esta manera, seremos capaces de eliminar la señal a la frecuencia concreta que se desee e incrementar la selectividad. Los ceros de transmisión propiamente dichos suponen un polo de atenuación y se sitúan sobre el eje imaginario del plano  $s$ .

Otra forma de verlo es que una frecuencia  $\omega$  es un cero de transmisión si en ella se anula la función de transferencia.

Los filtros usan las frecuencias de los ceros de transmisión, junto con las frecuencias de corte superior e inferior de la banda de paso y el rizado en dicha banda para formar la función de transferencia entre la entrada y la salida del filtro, así como para ver la forma que tendrá la respuesta del filtro.

Los ceros de transmisión siempre estarán situados en la banda atenuada y los distintos tipos son los siguientes:

- Ceros de transmisión en DC ( $f = 0$ )
- Ceros de transmisión en el infinito ( $f = \infty$ )
- Ceros de transmisión a frecuencias finitas ( $f \neq 0, \infty$ )

**11. Ceros de reflexión:** Son los valores de frecuencia en los que la señal no se refleja. ( $S_{11}$  ó  $S_{22}, S_{33}, \dots, = 0$ , para el caso de los multiplexores).

### 2.2.2 Proceso de diseño de un filtro:

El siguiente esquema muestra los pasos a seguir para diseñar un filtro:



Figura 1: Proceso de diseño de un filtro

#### 2.2.2.1 Especificaciones del filtro:

Este es el primer paso con el que se debe comenzar a la hora de diseñar un filtro. En él se detallarán los requisitos técnicos del filtro.

Cabe destacar el hecho de que un filtro ideal nos proporciona un 100% de transmisión de señal en la banda de paso y nos atenúa un 100% la señal en la banda de rechazo. Un filtro real solo puede aproximar este comportamiento y tendrá una cierta atenuación en la banda de paso y una cierta transmisión en la banda de rechazo con una zona de transición entre ambas de más o menos pendiente.

#### 2.2.2.2 Diseño del prototipo paso bajo:

El segundo lugar en el proceso se corresponderá con el diseño el prototipo paso bajo correspondiente a las especificaciones, normalizado en impedancia y en frecuencia de corte.

Los prototipos paso bajo de filtros son diseños electrónicos que son usados como plantillas para producir otros filtros que posteriormente serán empleados para una aplicación particular. Los filtros pueden operar a distintas frecuencias, impedancias y anchos de banda.

La utilidad de los prototipos paso bajo reside en la propiedad de que todos los demás tipos de filtros podrán ser obtenidos a partir de ellos aplicando un factor de escalado y conversión a los componentes del prototipo.

Dada una función de transferencia a realizar, la síntesis proporciona los valores de los elementos del prototipo paso bajo que proporcionan la respuesta deseada. Esos elementos del prototipo paso bajo (los denominados " $g_n$ " [4]) están dados bien en forma analítica o bien mediante tablas (estas tablas aparecen en una extensa bibliografía, como por ejemplo en [3, 4 y 8]). Sin embargo, hay que tener en cuenta que si existiesen ceros de transmisión, estas tablas ya no serían válidas y habría que recurrir a otros métodos de síntesis como el de la matriz de acoplamientos (sección 2.8).

A modo de ejemplo, y para comprender mejor qué son los elementos  $g_n$  de estos prototipos, a continuación se ilustra el diseño que tendría el prototipo paso bajo de un filtro maximalmente plano de Butterworth [3]:

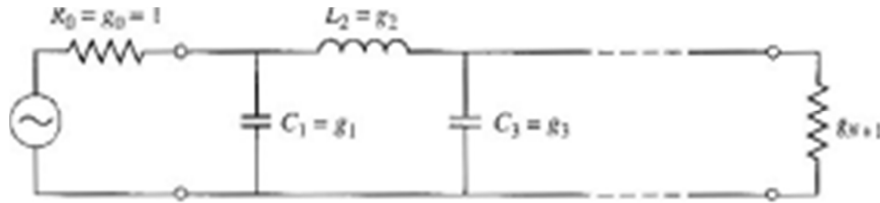


Figura 2: Prototipo paso bajo de un filtro de Butterworth

Como hemos mencionado, los valores de estos elementos  $g_n$  pueden encontrarse en tablas: [3,4]:

$N$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$
1	2.0000	1.0000									
2	1.4142	1.4142	1.0000								
3	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000							
4	0.7654	1.8478	1.8478	0.7654	1.0000						
5	0.6180	1.6180	2.0000	1.6180	0.6180	1.0000					
6	0.5176	1.4142	1.9318	1.9318	1.4142	0.5176	1.0000				
7	0.4450	1.2470	1.8019	2.0000	1.8019	1.2470	0.4450	1.0000			
8	0.3902	1.1111	1.6629	1.9615	1.9615	1.6629	1.1111	0.3902	1.0000		
9	0.3473	1.0000	1.5321	1.8794	2.0000	1.8794	1.5321	1.0000	0.3473	1.0000	
10	0.3129	0.9080	1.4142	1.7820	1.9754	1.9754	1.7820	1.4142	0.9080	0.3129	1.0000

Figura 3: Tablas con los valores de los elementos  $g_n$  de los prototipos paso bajo

### 2.2.2.3 Escalado y conversión:

Una vez obtenido el prototipo paso bajo correspondiente a las especificaciones, el siguiente paso es realizar las transformaciones oportunas de escalado de frecuencias así como de las conversiones necesarias para obtener el tipo de filtro deseado (paso bajo, paso alto, paso banda, banda eliminada, etc). Para llevar a cabo esto se utilizará la siguiente tabla [3]:

Low-pass	High-pass	Bandpass	Bandstop

Figura 4: Resumen de transformaciones de filtros

Siendo el factor de escalado el formulado en la siguiente ecuación:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \quad (2.6)$$

Donde  $\Delta\omega$  se corresponde con el ancho de banda a 3 dB,  $\omega_0$  es la frecuencia central,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las distintas frecuencias de corte. L y C son los valores normalizados de las bobinas y condensadores del prototipo paso bajo correspondiente.

#### 2.2.2.4 Implementación:

Esta es la cuarta y última etapa del proceso de diseño y la que se corresponde con la implementación real del filtro.

Hay que tener en cuenta que los filtros de microondas presentan varios problemas, relacionados, principalmente, con los elementos concentrados. Estos son los siguientes:

- Solamente están disponibles en un número limitado de frecuencias
- Los elementos parásitos son importantes conforme aumenta la frecuencia.
- Las distancias y tamaños ya no son despreciables, ya que estas son comparables a  $\lambda$ .

Para resolver estos problemas se podría utilizar las transformaciones de Richard, que pasa de elementos concentrados a distribuidos o las identidades de Kuroda, que separa elementos del filtro mediante uso de líneas, todos ellos especificados en una extensa bibliografía como por ejemplo [3,4 y 5].

### 2.2.3 Filtro paso banda

Puesto que los multiplexores estudiados a lo largo del este proyecto presenta bandas de paso similares a las de varios filtros paso banda, convendrá estudiar en mayor profundidad este tipo de filtros.

Los filtros paso banda permiten el paso de las componentes frecuenciales contenidas o acotadas en un determinado rango de frecuencias, comprendidas entre una frecuencia de corte inferior ( $f_L$ ) y otra superior ( $f_H$ ). El siguiente circuito representa un ejemplo de filtro paso banda:

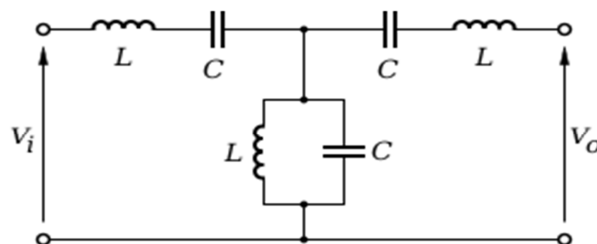


Figura 5: Ejemplo de un circuito de un filtro paso banda.

El ancho de banda del filtro es la diferencia entre las frecuencias de corte superior e inferior, o lo que es lo mismo, es el rango de frecuencias donde la diferencia entre el nivel de señal y el máximo (obtenido a la frecuencia de resonancia) es inferior a 3 dB. Fuera del ancho de banda, se producirá una atenuación de la señal.

En la siguiente figura aparece representada la respuesta de un filtro paso banda en la que pueden apreciarse claramente todas las características mencionadas anteriormente, tales como ancho de banda ( $B$ ), frecuencia de resonancia ( $f_0$ ), frecuencia de corte inferior ( $f_L$ ) y frecuencia de corte superior ( $f_H$ ).

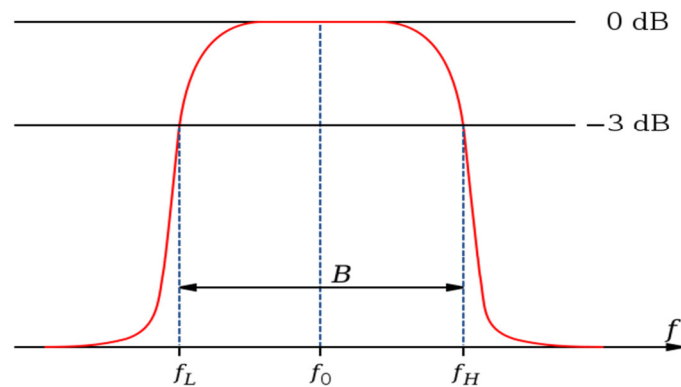


Figura 6: Respuesta en frecuencia de un filtro paso banda

Un filtro paso banda ideal tiene una banda de paso completamente plana, es decir, sin ganancias ni atenuaciones dentro de ella. Además la transición de la banda de paso sería instantánea en las frecuencias de corte inferior y superior, es decir tendría una forma similar a un pulso cuadrado tal y como se ilustra en la siguiente figura:

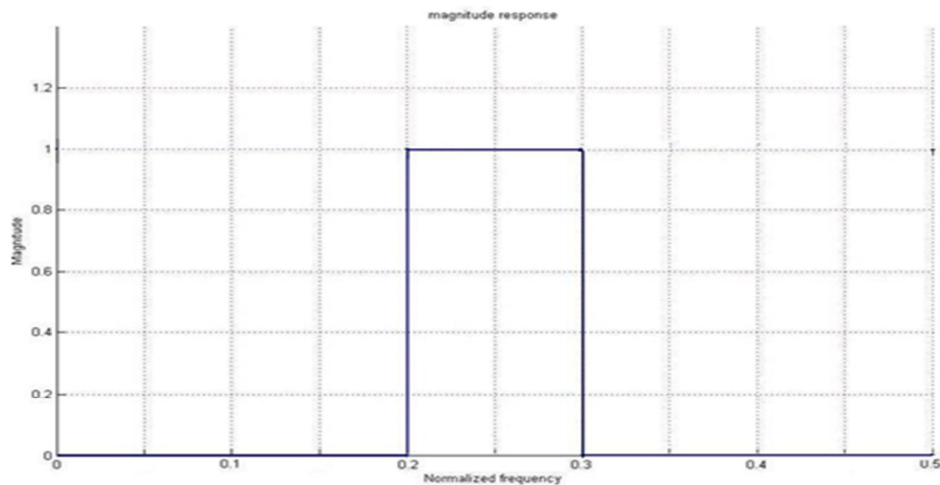


Figura 7: Respuesta en frecuencia de un filtro paso banda ideal

Sin embargo, en el caso real, la transición entre la banda de paso y la de rechazo no es completamente instantánea, por lo que habrá algunas frecuencias cercanas a las frecuencias de corte inferior y superior donde el valor de señal, aunque se atenuará, no se rechazará completamente.

## 2.3 Parámetros de Scattering

Dado que a lo largo de este proyecto se trabajará con altas frecuencias (frecuencias de microondas), convendrá trabajar con los denominados parámetros  $S$  (*Scattering* o de dispersión).

Los parámetros  $S$  son una construcción matemática que cuantifica como se propaga la energía de RF a través de redes multipuerto. Se denotan con la expresión  $S_{ij}$ . El primer subíndice indica el puerto destino ( $i$ ), mientras que el segundo subíndice ( $j$ ) indica el puerto incidente. En general se expresan mediante una matriz de tamaño  $p \times p$  donde  $p$  representa el número de puertos. La matriz de parámetros  $S$  para el caso de  $p$  puertos es la siguiente:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & S_{pp} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Para el caso particular de los filtros y cuadripolos la matriz de parámetros  $S$  puede definirse de la siguiente manera:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

El significado de cada uno de estos parámetros es el siguiente:

- **$S_{ii}$ :** Respuesta en reflexión. Coeficiente de reflexión de potencia visto desde el plano de referencia situado en el puerto  $i$  cuando colocamos el generador en este puerto y los demás puertos se cargan con la impedancia característica.
- **$S_{ij}$ :** Respuesta en transmisión. Es el coeficiente de transmisión de potencia de la puerta  $i$  a la puerta  $j$  cuando se cargan con la impedancia característica todas las puertas menos la  $i$ .

Otras de las características de los filtros que estudiaremos a lo largo de este proyecto son las siguientes:

- Son redes pasivas, por lo que siempre se cumplirá que  $|S_{ij}| \leq 1$ .
- Son redes recíprocas, por lo que siempre se verificará que  $S_{ij} = S_{ji}$ . La reciprocidad implica que la red tiene el mismo comportamiento en sentido directo que en sentido inverso de la transmisión, por lo que la matriz de parámetros  $S$  será simétrica (esto no implicará que el circuito sea simétrico).

Adicionalmente asumiremos que no existen pérdidas, esto es, que la suma de las potencias incidentes será igual a la suma de las potencias reflejadas, o lo que es lo mismo, la energía que no se transmite a la salida se reflejará a la entrada. Esto se traduce en que la

matriz de parámetros  $S$  será unitaria y se cumplirá, por tanto, la condición de conservación de potencia, que para el caso trivial de filtros puede expresarse como sigue:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (2.9)$$

Tendremos, por tanto, filtros pasivos y sin pérdidas, formados por elementos reactivos que resonarán a determinadas frecuencias, dejando pasar la señal de microondas, y en el resto de frecuencias reflejarán la energía. Según esto, distinguiremos dos bandas diferenciadas en su respuesta, donde los parámetros  $S$  tomarán los siguientes valores:

- Banda de paso:  $|S_{11}| \approx -\infty$  dB y  $|S_{21}| \approx 0$  dB
- Banda atenuada:  $|S_{11}| \approx 0$  dB y  $|S_{21}| \approx -\infty$  dB

## 2.4 Polinomios característicos

Los parámetros de Scattering pueden ser calculados mediante una representación alternativa, los denominados polinomios característicos  $E(s)$ ,  $F(s)$  y  $P(s)$  a partir de las especificaciones del filtro: [2]

1. Frecuencia central del filtro ( $f_0$ )
2. Ancho de banda ( $\Delta f$ )
3. Pérdidas de retorno máximas (rizado) en la banda de paso,  $L$ .
4. Orden del filtro ( $n$ ).
5. Número ( $n_z$ ) y distribución de los ceros finitos de transmisión y ecualización.
6. Adicionalmente, se impone que los ceros de reflexión se sitúen sobre el eje imaginario del plano  $s$ .

Estos polinomios parten de que la función característica del filtro  $K(j\Omega)$  es conocida (procedimientos para su obtención ampliamente descrito en [2]). El siguiente paso es la obtención de una expresión racional de la misma. Esto equivale a calcular los polinomios característicos del prototipo paso bajo ( $E(s)$ ,  $P(s)$  y  $F(s)$ ), y por tanto, a obtener los valores de los parámetros  $S$  del mismo. La relación entre los parámetros  $S$  y los polinomios característicos es la siguiente:

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)}{E(s)} \quad (2.10)$$

$$S_{21}(s) = \frac{P(s)}{E(s)} \quad (2.11)$$



En principio hay que aclarar el significado de estos polinomios, y más concretamente de sus raíces. Estas son: [2]

- Raíces de  $F(s)$ :  $n$  ceros de reflexión del filtro (denotadas como  $j\Omega_{a,k}$ ), que se encuentran sobre el eje imaginario del plano  $s$ .

$$F(s) = \prod_{k=1}^n (s - j\Omega_{a,k}) \quad (2.12)$$

- Raíces de  $P(s)$ :  $n_z$  ceros de transmisión del filtro (denotados como  $j\Omega_{z,k}$ ), prescritos como especificación de diseño. Pueden estar sobre el eje imaginario del plano  $s$  (ceros de transmisión) o tomar valores complejos e incluso reales (ceros de ecualización), en cuyo caso han de aparecer por parejas simétricas respecto al eje imaginario.

$$P(s) = A_1 \prod_{k=1}^{n_z} (s - j\Omega_{z,k}) = A_1 P_1(s) \quad (2.13)$$

- Raíces de  $E(s)$ :  $n$  frecuencias propias del filtro ( $s_k$ ). Han de situarse en el semiplano izquierdo del filtro, es decir,  $\text{Re}\{s_k\} < 0, \forall k$ .

$$F(s) = \prod_{k=1}^n (s - s_k) \quad (2.14)$$

## 2.5 Resonadores y acoplamientos

Los multiplexores de microondas estudiados a lo largo del presente documento estarán formados por dos tipos de nodos: resonadores y puertos (o nodos no resonantes). Además existirán acoplamientos entre los distintos nodos que servirán para concebir el circuito completo como un todo.

A continuación se realizará una breve introducción a cada uno de estos elementos que formarán la red completa para comprender su funcionamiento.

### 2.5.1 Resonadores

Un resonador es un dispositivo que es capaz de almacenar energía. Son como filtros ya que son selectivos en frecuencia (absorben energía a determinadas frecuencias).

Existen dos tipos de resonadores: serie y paralelo, sin embargo, aquí nos centraremos en los segundos.

La resonancia paralelo o circuito antirresonante es aquella en la que en sus bornes hay un máximo de voltaje y un mínimo de corriente, lo que supone máximo del módulo de la impedancia.

Cabe destacar el hecho de que aunque en el presente documento solamente se estudiarán redes sin pérdidas, la inclusión de pérdidas en los resonadores es sencilla, ya que basta con insertar una resistencia en el modelo del circuito equivalente del resonador, conectada en serie o en paralelo según el tipo de resonador, tal y como puede apreciarse en la siguiente figura:

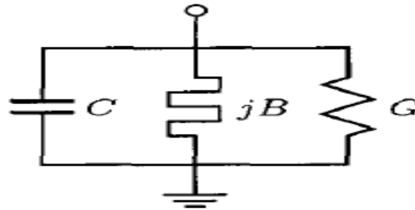


Figura 8: Modelo circuital de un resonador con pérdidas

Los circuitos resonantes tendrán un determinado factor de calidad con las características descritas en la sección 2.2.1.

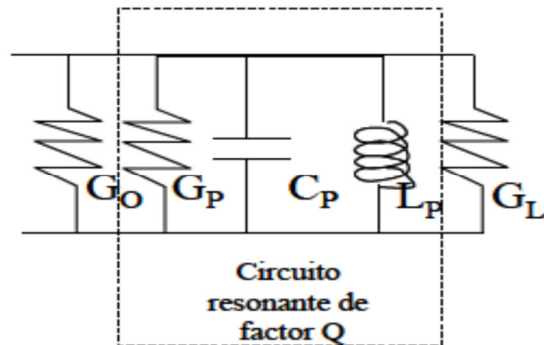


Figura 9: Circuito resonante de factor Q

Los puertos de los multiplexores se corresponderán con los nodos no resonantes y no serán más que la estructura de unión del circuito con el exterior.

## 2.5.2 Acoplamientos

Los resonadores estarán unidos los unos con los otros mediante una serie de acoplamientos. Los acoplamientos representan la transferencia de energía entre resonadores o de los resonadores con los puertos.

Si el objetivo es medir el acoplamientos entre la puerta  $i$  y la puerta  $j$ , es decir, cuánta potencia que entre por  $i$  sale por  $j$ , utilizaremos los parámetros  $S_{ji}$

Los acoplamientos utilizados a lo largo de este proyecto se representarán mediante líneas que unirán los nodos (tanto resonadores como puertos) de la red.

## 2.6 Inversores de impedancia y de admitancia

### 2.6.1 Inversor de impedancia

Un inversor de impedancia es una red de dos puertos (cuadripolo) tal que, invariablemente de la frecuencia, si un puerto termina con una impedancia  $Z_L$ , la impedancia que se ve en el otro puerto es la siguiente: [3]

$$Z_{in} = \frac{K^2}{Z_L} \quad (2.15)$$

Si  $Z_L$  es inductiva capacitiva,  $Z_{in}$  será capacitiva inductiva, por lo que podríamos decir que el inversor tiene un cambio de fase de  $90^\circ$  o de un múltiplo impar de  $\pm 90^\circ$ .

$K$  es real y se utiliza para definir la impedancia característica del inversor, por este motivo a los inversores de impedancia se les conoce como inversores  $K$ .

La matriz de parámetros ABCD de un inversor de impedancias ideal se denota mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mp jK \\ \pm \frac{1}{jK} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Un inversor de impedancias tiene el siguiente aspecto:

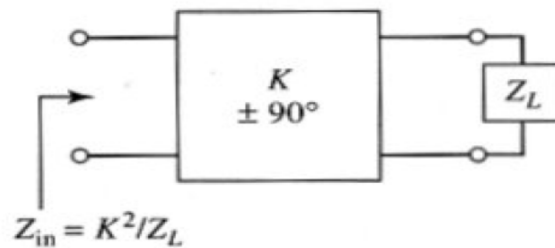


Figura 10: Inversor de impedancias

Un ejemplo de un inversor de impedancias es un transformador ideal de longitud  $\lambda/4$  tal y como se muestra a continuación:

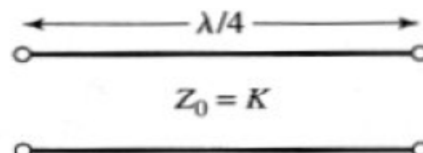


Figura 11: Transformador de  $\lambda/4$  equivalente a un inversor de impedancias

Los inversores de impedancias se pueden utilizar en un filtro paso banda para convertir una admitancia en paralelo en una impedancia serie equivalente de la siguiente manera:

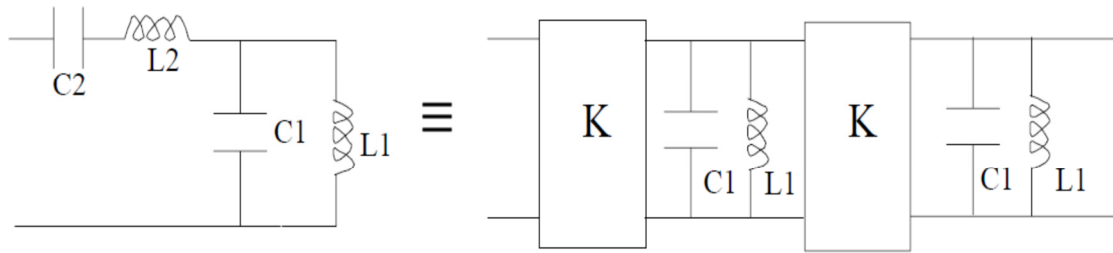


Figura 12: Transformaciones equivalentes usando inversor de impedancias

De este modo es posible construir un filtro paso banda conectando resonadores paralelo.

## 2.6.2 Inversor de admitancia

De igual modo un inversor de admitancia es una red de dos puertos (cuadripolo) tal que, invariablemente con la frecuencia, si la admitancia conectada a un puerto es  $Y_L$ , entonces la admitancia  $Y_{in}$  del otro puerto es:

$$Y_{in} = \frac{J^2}{Y_L} \quad (2.17)$$

Donde  $J$  es real y se denomina admitancia característica del inversor, por lo que los inversores de admitancia también se conocen como inversores  $J$ . Este inversor de admitancias tiene un cambio de fase de  $\pm 90^\circ$  o de un múltiplo impar de  $90^\circ$ .

La matriz de parámetros ABCD de un inversor de admitancias ideal se denota mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \pm \frac{1}{j \cdot J} \\ \mp j \cdot J & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Un inversor de admitancias tiene el siguiente aspecto:

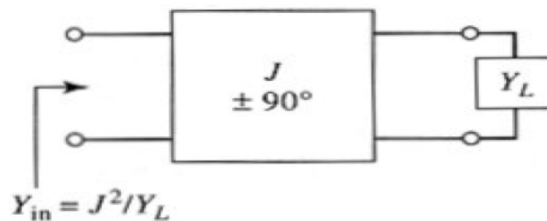


Figura 13: Inversor de admitancia

Un ejemplo de un inversor de admitancias sería un transformador en  $\lambda/4$  tal y como se muestra a continuación:

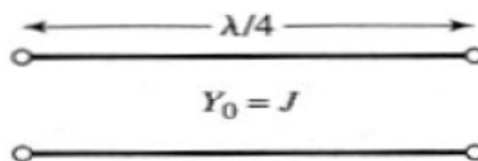


Figura 14: Transformador de  $\lambda/4$  equivalente a un inversor de admitancias

Los inversores de admitancia se pueden utilizar en un filtro paso banda para convertir una impedancia serie una admitancia paralelo equivalente:

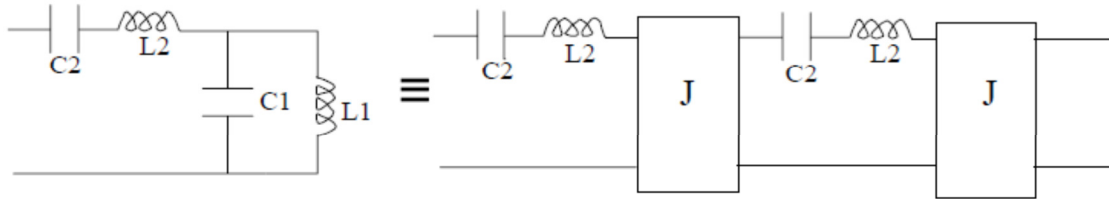


Figura 15: Transformaciones equivalentes usando inversor de impedancias

De este modo es posible construir un filtro paso banda conectando resonadores serie.

Finalmente se puede concluir que un inversor de admitancias es equivalente a un inversor de impedancias sin más que usar la relación:  $K = \frac{1}{j}$

## 2.7 Matriz de acoplamientos

La matriz de acoplamientos es una matriz  $M \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ , siendo  $n$  el número de resonadores de la red y  $p$  el número de puertos, en la que aparecen representados todos los acoplamientos de cada uno de los elementos de la red con todos los demás, así como el coeficiente de acoplamiento para cada uno de ellos. Un coeficiente, digamos  $M_{ij}$ , que tome el valor cero implicará que no existirá acoplamiento entre los elementos  $i$  y  $j$ .

La representación de filtros paso banda mediante matrices de acoplamiento es conveniente ya que mediante operaciones matriciales será posible realizar transformaciones de topologías (que es la forma en la que están unidos mediante acoplamientos todos los nodos de la red), de manera más sencilla. [6, 8].

Esta matriz permite el cálculo de la respuesta en frecuencia de la red, pero para sintetizarla serán necesarios procesos analíticos o de optimización. Adicionalmente podrá ser transformada en otra matriz distinta pero que produzca la misma respuesta en frecuencia usando las denominadas transformaciones de semejanza, tales como las rotaciones de Givens (sección 3.3).

Cabe destacar el hecho de que aunque en el presente documento se trabajará con redes sin pérdidas, la inclusión de pérdidas en los resonadores es sencilla, ya que basta con insertar una resistencia en el modelo equivalente del resonador conectada en serie o paralelo según el tipo de resonador, tal y como se ilustra en la figura 8.

Para la síntesis de esta matriz se empleará el método de síntesis de la matriz transversal “ $N+2$ ”.

## 2.8 Síntesis de la matriz de acoplamientos transversal “ $N+2$ ”

En esta sección se desarrollará el procedimiento completo para la síntesis de la matriz de acoplamientos de distintas funciones de filtrado, incluyendo las funciones canónicas completas (“*fully canonical*”). Este tipo de funciones canónicas completas hace referencia a que todos los polinomios característicos  $P$ ,  $E$  y  $F$  pueden ser de grado  $N$  (grado del filtro), aunque para la mayoría de los ejemplos que se desarrollarán a lo largo del presente documento no hará falta que lo sean, ya que si  $P$  es de grado menor ( $E$  y  $F$  siempre son de grado  $N$ ) esto simplemente significará que no existirá acoplamiento directo entre puertos. Sin embargo, el método de síntesis engloba también a las funciones totalmente canónicas, y dado que éstas serán un caso más general, su estudio no supondrá ninguna pérdida de generalidad.

El método síntesis de matrices de acoplamiento aquí empleado es conocido como método “ $N+2$ ” o “extendido” ya que la matriz de acoplamientos tendrá una pareja extra de filas al principio y al final, así como otra pareja extra de columnas a la izquierda y a la derecha rodeando todas ellas el “núcleo”, que es la matriz de acoplamientos  $N \times N$  y que es la encargada de representar los acoplamientos entre la entrada y salida correspondientes con los nodos de los resonadores.

Este método es capaz de sintetizar redes transversales paso banda en las que se pueden alojar múltiples acoplamientos de entrada / salida, así como acoplamientos directos entre fuente / carga, necesarios para las redes canónicas completas.

La síntesis de matrices de acoplamiento mediante el método “ $N+2$ ” solventa algunos de los problemas de la síntesis convencional matrices de acoplamiento mediante el método  $N \times N$  [2]. Las ventajas de esta nueva matriz “ $N+2$ ” comparada con la síntesis convencional ( $N \times N$ ) son las siguientes:

- Se pueden incluir múltiples acoplamientos de entrada / salida, es decir, se pueden incluir acoplamientos directamente desde la entrada hacia los resonadores internos, o desde éstos hacia la carga, además de los principales acoplamientos de entrada / salida del primer y último resonador en el circuito del filtro.
- Se pueden sintetizar funciones de filtrado de tipo canónicas completas ( $N$  ceros de transmisión en posiciones finitas), mientras que el método de síntesis de la matriz de acoplo  $N \times N$ , permitía sólo un máximo de  $N-2$  ceros de transmisión en posiciones finitas.
- Durante ciertos procesos de la síntesis donde se emplean algunas transformaciones de semejanza, como las rotaciones de Givens (sección 3.5), a veces es conveniente “aparcar” temporalmente algunos acoplamientos en las filas o columnas más

externas, mientras se realizan rotaciones en otro lugar de la matriz para que no resulten afectados por éstas.

- Adicionalmente, el método de síntesis de la matriz “ $N+2$ ” es más sencillo que el de la matriz  $N \times N$  [2], puesto que no requiere la etapa de ortornormalización de Gram-Schmidt.

El procedimiento que se emplea para sintetizar la matriz de acoplamientos transversal “ $N+2$ ” será el de la construcción de la matriz de parámetros de admitancia en cortocircuito ( $Y_N$ ) para la red total de dos maneras:

1. En primer lugar, se partirá de los coeficientes de los polinomios racionales de los parámetros de transmisión y reflexión  $S_{21}(s)$  y  $S_{11}(s)$ , que representan las características del filtro.
2. En segundo lugar se calculará  $Y_N$  a partir de los elementos del array de la red transversal.

Igualando la matriz  $Y_N$  obtenida mediante estos dos métodos, los elementos de la matriz de acoplamientos asociada con la red del array transversal podrá ser relaciona con los coeficientes de los polinomios de  $S_{21}(s)$  y  $S_{11}(s)$ .

### 2.8.1 Síntesis mediante polinomios de transferencia y reflexión

Los polinomios característicos  $P$ ,  $F$  y  $E$  están relacionados con los parámetros de Scattering de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$S_{21}(s) = \frac{P(s)}{\varepsilon E(s)} \quad (2.19)$$

$$S_{11}(s) = \frac{F(s)}{\varepsilon_R E(s)} \quad (2.20)$$

Donde:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{\frac{RL}{10}} - 1}} \cdot \frac{P(s)}{F(s)} \Big|_{s=j} \quad RL = \text{Pérdidas de retorno (dB)} \quad (2.21)$$

$$\varepsilon_R = 1 \quad (\text{excepto para funciones canónicas completas}) \quad (2.22)$$

Hay que tener en cuenta que los polinomios característicos deberán seguir cumpliendo con ciertas propiedades ya necesarias en el proceso de síntesis de la matriz  $N \times N$ .

- Se asume que los polinomios  $E(s)$ ,  $F(s)$  y  $P(s)$  han sido normalizados respecto a sus coeficientes de grado más alto.
- $E(s)$  y  $F(s)$  son polinomios de grado  $N$ , siendo  $N$  el grado de la función de filtrado.

- $P(s)$  es un polinomio que contiene la posición de los ceros finitos de transmisión y es de grado  $n_{fz}$ , siendo  $n_{fz}$  el número de ceros de transmisión finitos deseados.
- Para que la red sea realizable se tiene que cumplir que el número de ceros de transmisión finitos deberá ser menor que el grado de la función de filtrado, esto es  $n_{fz} \leq N$ , a diferencia de lo que ocurría en la síntesis de matrices de acoplamiento  $N \times N$ , donde la limitación era  $n_{fz} \leq (N-2)$ .
- Aparece un nuevo término  $\varepsilon_R$ , cuyo valor es igual a la unidad en todos los caso excepto en funciones de filtrado canónicas completas. Hay que notar que en el proceso de síntesis de matrices  $N \times N$ , se obviaba este término ya que no podían conseguirse topologías canónicas completas.

La aparición del nuevo término  $\varepsilon_R$  hace que tengamos que calcular de forma diferente su valor, al igual que el de la otra constante  $\varepsilon$ , en función de si se trabaja con redes canónicas completas o no.

### 2.8.1.1 Cálculo de $\varepsilon$ y $\varepsilon_R$ en funciones de filtrado canónicas completas

Para el caso de funciones canónicas completas, la constante  $\varepsilon_R$  tendrá un valor mayor que la unidad de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (2.23)$$

Sea  $k$  definida por la siguiente ecuación:

$$k = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad (2.24)$$

Se puede despejar el valor de cada constante por separado:

$$\varepsilon = \sqrt{k^2 + 1} \quad (2.25)$$

Adicionalmente los parámetros  $S$  deberán satisfacer las condiciones unitarias:

$$S_{11} \cdot S_{11}^* + S_{21} \cdot S_{21}^* = 1 \quad (2.26)$$

$$S_{22} \cdot S_{22}^* + S_{12} \cdot S_{12}^* = 1 \quad (2.27)$$

$$S_{11} \cdot S_{12}^* + S_{21} \cdot S_{22}^* = 0 \quad (2.28)$$

Es importante asegurar también la ortogonalidad de los parámetros de transferencia y reflexión. Esto implica que deberá cumplirse que la suma de las fases individuales que forman la fase total de los vectores  $S_{11}(s)$  y  $S_{21}(s)$ , debe ser múltiplo de  $\pi/2$  radianes.



Como  $S_{21}(s)$ ,  $S_{11}(s)$  y  $S_{22}(s)$  comparten denominador común ( $E(s)$ ), solo es necesario considerar sus polinomios numeradores hasta donde concierne la condición de fases y donde  $\phi, \theta_1, \theta_2$  son las fases de  $S_{21}(s)$ ,  $S_{11}(s)$  y  $S_{22}(s)$  respectivamente:

$$\Delta\phi = \left[ \phi - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] = \frac{\pi}{2} (2 \cdot k \pm 1) \quad (2.29)$$

Entonces, los múltiplos de  $\pi/2$  dependerán, en primer lugar, del número de ceros de transmisión en posiciones finitas  $n_{fz}$ , del polinomio numerador de  $S_{21}(s)$ , esto es,  $P(s)$ . Adicionalmente también dependerán del grado  $N$  de la función de filtrado, que será el grado de los polinomios numeradores  $S_{11}(s)$  y  $S_{22}(s)$ , esto es  $F(s)$  y  $F'(s)$  respectivamente. De acuerdo con todo esto, se puede observar como es necesario que la ecuación (2.29) produzca un múltiplo impar de  $\pi/2$ :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \left[ \phi - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right] = n_{fz} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\left( N \cdot \frac{\pi}{2} + N \cdot \frac{\pi}{2} \right)}{2} = n_{fz} \cdot \frac{\pi}{2} - N \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi}{2} (N - n_{fz}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se puede observar que para que  $\Delta\phi$  produzca un múltiplo impar de  $\pi/2$ , es decir, para Asegurar la ortogonalidad entre  $F(s)$  y  $P(s)$ , la cantidad entera  $N - n_{fz}$ , debe ser impar. Por tanto, es necesario multiplicar  $P(s)$  por  $j$  cuando  $N - n_{fz}$  sea un número entero par. De esta forma estaremos añadiendo  $\pi/2$  a la fase de  $\phi$ , y por tanto  $\Delta\phi$  pasará a ser un múltiplo impar de  $\pi/2$  radianes, que es justamente lo que se está buscando.

Por otro lado, los polinomios del numerador ( $y_n$ ) y del denominador ( $y_d$ ) de los elementos  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$  de la matriz  $[Y_N]$ , pueden construirse directamente partir de los polinomio de reflexión  $S_{21}(s)$  y  $S_{11}(s)$ . [7]

Para una red de dos terminaciones con impedancia de fuente y de carga de  $1\Omega$ , se cumple que:

- Para  $N$  par:

$$y_{22} = \frac{y_{22n}(s)}{y_d(s)} = \frac{n_1(s)}{m_1(s)} \quad (2.31)$$

$$y_{21} = \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot m_1(s)} \quad (2.32)$$

- Para  $N$  impar:

$$y_{22} = \frac{y_{22n}(s)}{y_d(s)} = \frac{m_1(s)}{n_1(s)} \quad (2.33)$$

$$y_{21} = \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot n_1(s)} \quad (2.34)$$

Donde:

$$m_1 = Re(e_0 + f_0) + j \cdot Im(e_1 + f_1)s + Re(e_2 + f_2)s^2 + \dots \quad (2.35)$$

$$n_1 = j \cdot Im(e_0 + f_0) + Re(e_1 + f_1)s + jIm(e_2 + f_2)s^2 + \dots \quad (2.36)$$

$e_i$  = coeficientes complejos de  $E(s)$

$f_i$  = coeficientes complejos de  $F(s)/\varepsilon_R$

$i = 0, 1, 2, \dots, N$

De la misma forma, para redes de una terminación, los polinomios  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$  pueden encontrarse de la siguiente manera:

- Para  $N$  par:

$$y_{22} = \frac{y_{22n}(s)}{y_d(s)} = \frac{n_1(s)}{m_1(s)} \quad (2.37)$$

$$y_{21} = \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} = \frac{P(s)}{\varepsilon \cdot m_1(s)} \quad (2.38)$$

- Para  $N$  impar:

$$y_{22} = \frac{y_{22n}(s)}{y_d(s)} = \frac{m_1(s)}{n_1(s)} \quad (2.39)$$

Donde:

$$m_1 = Re(e_0) + j \cdot Im(e_1)s + Re(e_2)s^2 + \dots \quad (2.40)$$

$$n_1 = j \cdot Im(e_0) + Re(e_1)s + jIm(e_2)s^2 + \dots \quad (2.41)$$

$e_i$  = coeficientes complejos de  $E(s)$

$i = 0, 1, \dots, N$

Conociendo entonces los polinomios numerador y denominador de  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$ , sus residuos  $r_{21k}$  y  $r_{22k}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), podrán obtenerse con la expansión en fracciones simples, mientras que los valores propios puramente reales  $\lambda_k$  de la red, se pueden encontrar a partir de las raíces puramente imaginarias del polinomio denominador  $y_d(s)$  (común para  $y_{21}(s)$  e  $y_{22}(s)$ ), que vendrán dadas por  $j\lambda_k$ .

Si expresamos los residuos de forma matricial, obtenemos la siguiente matriz de admitancias:

$$[Y_N] = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{y_d(s)} \cdot \begin{bmatrix} y_{11n}(s) & y_{12n}(s) \\ y_{21n}(s) & y_{22n}(s) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$[Y_N] = j \cdot \begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ K_0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{s - j\lambda_k} \cdot \begin{bmatrix} r_{11k} & r_{12k} \\ r_{21k} & r_{22k} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Donde la constante real  $K_0$  es nula excepto para funciones canónicas completas, es decir, cuando  $N = n_{fz}$ , en cuyo caso el grado del numerador de  $y_{21}(s)$  es igual al del denominador, y  $K_0$  debe extraerse de  $y_{21}(s)$  previamente para reducir el grado de su polinomio denominador en uno, antes de encontrar su residuos  $r_{21k}$ .

Además, hemos de tener en cuenta que en el caso funciones canónicas completas,  $N - n_{fz} = 0$  es una cantidad par, por lo que será necesario multiplicar  $P(s)$  por  $j$  para asegurar que se satisfacen las condiciones de unitariedad de la matriz de parámetros  $S$ .

El valor de la constante  $K_0$ , siendo independiente de la variable frecuencial  $s$ , deber evaluarse en  $s = j\infty$  de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$j \cdot K_0 = \left. \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)} \right|_{s=j\infty} = \left. \frac{j \cdot P(s)/\varepsilon}{y_d(s)} \right|_{s=j\infty} \quad (2.44)$$

El proceso para construir el denominador común ( $y_d$ ) de acuerdo con las ecuaciones (2.35) y (2.36) lleva a que el coeficiente de grado más alto tenga un valor de  $(1+1/\varepsilon_R)$ , y como el grado más alto de  $P(s)$  es 1, despejando de (2.40) podemos obtener el valor de esta nueva contante  $K_0$ :

$$K_0 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon_R}} = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_R} \quad (2.45)$$

Entonces, el nuevo polinomio numerador,  $y_{21n}$ , que será de grado  $N-1$ , se puede obtener de acuerdo con la siguiente ecuación:

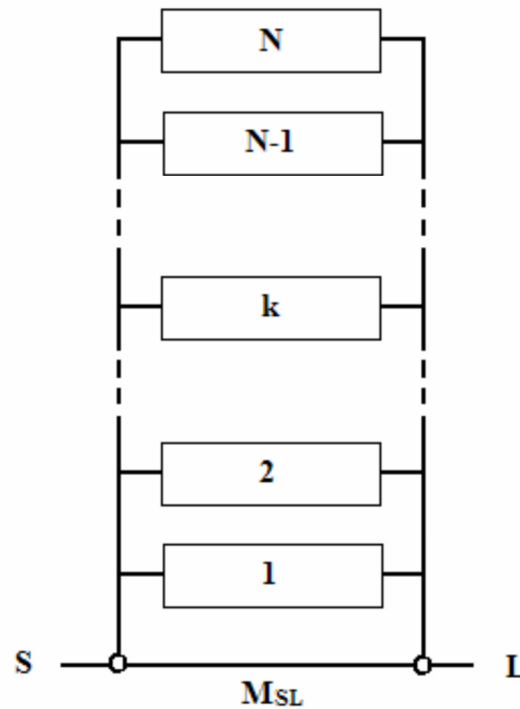
$$y'_{21n}(s) = y_{21n}(s) - j \cdot K_0 \cdot y_d(s) \quad (2.46)$$

Mientras que los residuos de  $r_{21k}$  de  $y'_{21n} = \frac{y_{21n}(s)}{y_d(s)}$ , podemos encontrarlos de la forma habitual, es decir, mediante la expansión en fracciones simples.

## 2.8.2 Síntesis mediante la aproximación circuital

Como se ha visto, la matriz de admitancia  $[Y_N]$  se puede definir a través de los parámetros  $S$ . Adicionalmente, se puede obtener mediante el análisis directo de una red transversal canónica completa.

La obtención de esta matriz  $[Y_N]$  mediante este segundo método será el objeto de esta sección.

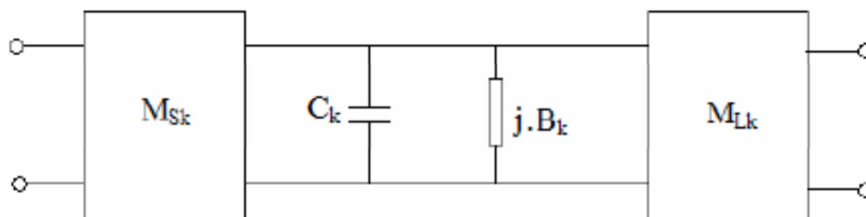


**Figura 16:** Red de  $N$  resonadores transversales incluyendo el acople directo fuente/carga  $M_{SL}$

Como se puede observar en la figura 16, la red está formada por una serie de  $N$  secciones individuales paso bajo de primer orden, conectadas en paralelo entre los terminales de fuente y carga.

El inversor de acople directo entre la fuente y la carga,  $M_{SL}$ , se incluye para permitir la realización de funciones de transferencia canónicas completas, de acuerdo con la regla de camino mínimo. Esta regla, enuncia que el número máximo de ceros de transmisión en posiciones finitas ( $n_{fz\ max}$ ) que puede realizar una red, viene determinado por el grado  $N$  de esta red, menos el número de resonadores existentes en la ruta más corta de la red entre la terminación de fuente y la de carga,  $n_{min}$ . En redes canónicas completas,  $n_{min} = 0$ , por lo que  $n_{fz\ max} = N - n_{min} = N$ , esto es, el número máximo de ceros de transmisión en posiciones finitas que puede realizar una red coincide con el grado de la función de filtrado ( $N$ ).

Cada una de las  $N$  secciones paso bajo, está formada por un condensador  $C_k$  conectado en paralelo, y una susceptancia  $B_k$  invariante con la frecuencia, conectada mediante inversores de admitancia, de admitancias características  $M_{sk}$  y  $M_{lk}$ , a la fuente y a la carga respectivamente.



**Figura 17:** Sección paso bajo  $k$ -ésima

### 2.8.2.1 Particularización para funciones de filtrado canónicas completas

El inversor directo entre la fuente y carga ( $M_{SL}$ ) es nulo excepto para funciones de filtrado canónicas completas, en las que el número de ceros de transmisión en posiciones finitas es igual a  $N$ . A frecuencias infinitas,  $s = \pm j\infty$ , todos los condensadores  $C_k$  se convierten en cortocircuitos en paralelo:

$$Z_c = \frac{1}{sC_k} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (2.47)$$

Con lo que el circuito resultante queda como sigue:

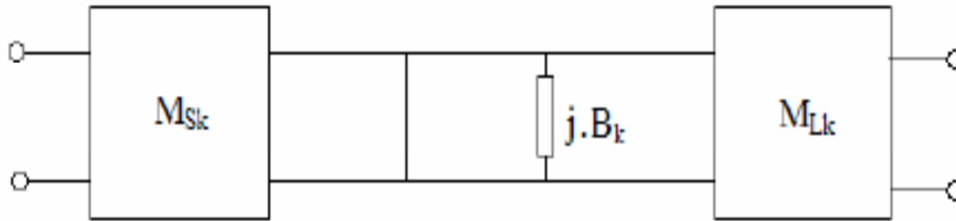


Figura 18: Sección paso bajo equivalente a frecuencias infinitas

Los cortocircuitos creados por los condensadores en las distintas secciones paso bajo, aparecen como circuitos abiertos en los puertos de fuente y carga debido a los inversores  $M_{sk}$  y  $M_{lk}$ , por tanto, el único camino entre fuente y carga restante, se produce a través del inversor de admitancia  $M_{SL}$ , invariante con la frecuencia.

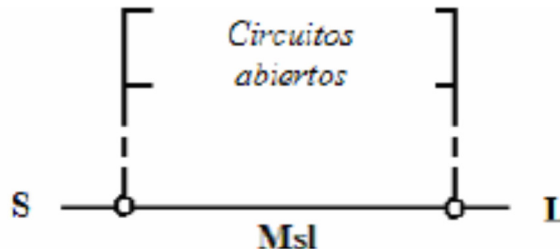


Figura 19: Único camino posible entre fuente y carga

Si la impedancia de carga es  $1\Omega$ , entonces el circuito equivalente del array transversal a frecuencias infinitas será el siguiente:

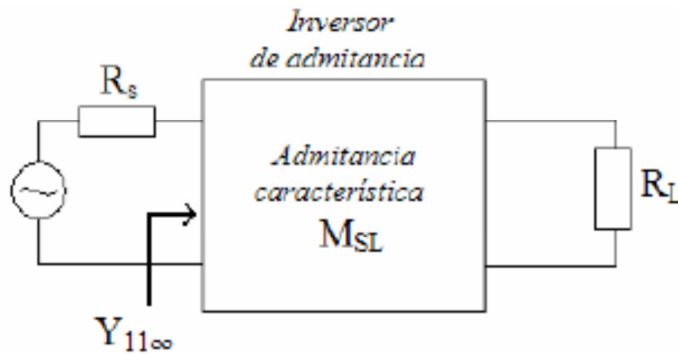


Figura 20: Circuito equivalente del array transversal cuando  $s = \pm j \cdot \infty$

Por tanto se puede calcular la impedancia  $Y_{11\infty}$  sabiendo que un inversor de admitancia se comporta como un transformador en  $\lambda/4$  (sección 2.6). Esto implica que la impedancia de entrada del inversor viene dada por:

$$Y_{in} = \frac{M_{SL}^2}{Y_L} \quad (2.48)$$

Como para nuestro caso particular  $Y_L = 1/R_L = 1\Omega$  obtendremos la siguiente igualdad:

$$Y_{11\infty} = M_{SL}^2 \quad (2.49)$$

El coeficiente de reflexión a la entrada puede expresarse de acuerdo con la siguiente ecuación cuando  $s = \pm j\infty$ :

$$S_{11}(s)|_{s=j\infty} = |S_{11\infty}| = \frac{1 - Y_{11\infty}}{1 + Y_{11\infty}} \quad (2.50)$$

Además, teniendo en cuenta la ecuación de conservación de la energía (2.51):

$$1 = |S_{11\infty}|^2 + |S_{21\infty}|^2 \quad (2.51)$$

$$|S_{21\infty}| = \sqrt{1 - |S_{11\infty}|^2} \quad (2.52)$$

Despejando se puede obtener el valor de  $|S_{21\infty}|$ :

$$|S_{21\infty}| = \sqrt{1 - \left| \frac{1 - Y_{11\infty}}{1 + Y_{11\infty}} \right|^2} \quad (2.53)$$

$$|S_{21\infty}| = \sqrt{1 - \left| \frac{1 - M_{SL}^2}{1 + M_{SL}^2} \right|^2} \quad (2.54)$$

$$|S_{21\infty}| = \sqrt{\frac{|1 + M_{SL}^2|^2 - |1 - M_{SL}^2|^2}{|1 + M_{SL}^2|^2}} \quad (2.55)$$

$$|S_{21\infty}| = \sqrt{\frac{4 + M_{SL}^2}{1 + M_{SL}^2}} = \frac{2M_{SL}}{1 + M_{SL}^2} \quad (2.56)$$

Despejando para encontrar  $M_{SL}$  en función de  $S_{11\infty}$  y  $S_{21\infty}$ :

$$|S_{21\infty}| + |S_{21\infty}| \cdot M_{SL}^2 = 2M_{SL} \quad (2.57)$$

$$|S_{21\infty}| \cdot M_{SL}^2 - 2M_{SL} + |S_{21\infty}| = 0 \quad (2.58)$$

$$|S_{21\infty}| \cdot \frac{M_{SL}^2}{2} - M_{SL} + \frac{|S_{21\infty}|}{2} = 0 \quad (2.59)$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado podemos obtener el valor de  $M_{SL}$ :

$$M_{SL} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \left( \frac{|S_{21\infty}|}{2} \cdot \frac{|S_{21\infty}|}{2} \right)}}{2 \cdot \frac{|S_{21\infty}|}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - |S_{21\infty}|^2}}{|S_{21\infty}|} \quad (2.60)$$

Teniendo en cuenta además la ecuación de conservación de la energía (2.51)

$$M_{SL} = \frac{1 \pm |S_{11\infty}|}{|S_{21\infty}|} \quad (2.61)$$

Adicionalmente, como para una red completamente canónica  $P(s)$ ,  $F(s)$  y  $E(s)$  son polinomios de grado  $N$  normalizados a la unidad en sus coeficientes de grado más alto, se cumple que a frecuencias infinitas :

$$|S_{21}(j\infty)| = \frac{P(j\infty)}{\varepsilon E(j\infty)} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.62)$$

$$|S_{11}(j\infty)| = \frac{F(j\infty)}{\varepsilon_R E(j\infty)} = \frac{1}{\varepsilon_R} \quad (2.63)$$

Por lo tanto:

$$M_{SL} = \frac{1 \pm |S_{11\infty}|}{|S_{21\infty}|} = \frac{1 \pm \left( \frac{1}{\varepsilon_R} \right)}{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{(\varepsilon_R \pm 1) \cdot \varepsilon}{\varepsilon_R} \quad (2.64)$$

Donde  $\varepsilon_R$  tiene un valor algo mayor que la unidad para redes canónicas completas, por lo que tomando el signo negativo, obtendremos un valor relativamente pequeño de  $M_{SL}$ :

$$M_{SL} = \frac{(\varepsilon_R - 1) \cdot \varepsilon}{\varepsilon_R} \quad (2.65)$$

Y como debe ocurrir en filtros que no son completamente canónicos, en los que  $\varepsilon_R = 1$ , se cumplirá que  $M_{SL}=0$ . Si seguimos desarrollando  $M_{SL}$ , sustituyendo el valor correspondiente de  $\varepsilon_R$  dado por (2.23), vemos que  $M_{SL}$  puede expresarse también de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$M_{SL} = \frac{(\varepsilon_R - 1) \cdot \varepsilon}{\varepsilon_R} = \frac{\left( \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} - 1 \right) \cdot \varepsilon}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} = \frac{\left( \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right) \cdot \varepsilon}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} = \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad (2.66)$$

Sin embargo, si en lugar de usar el signo negativo, usamos el signo positivo de (2.64) y sustituimos el valor de  $\varepsilon_R$  obtenido en la ecuación (2.23) obtendremos un nuevo valor de  $M_{SL}$  (denotado como  $M'_{SL}$ ):

$$M'_{SL} = \frac{(\varepsilon_R + 1) \cdot \varepsilon}{\varepsilon_R} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} + 1\right) \cdot \varepsilon}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} = \frac{\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right) \cdot \varepsilon}{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} \quad (2.67)$$

$$M'_{SL} = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\right) \cdot \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (2.68)$$

$$M'_{SL} = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1} + \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1} - (\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{1}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{1}{M_{SL}} \quad (2.69)$$

Como se puede observar, existirá una segunda solución  $M'_{SL} = 1/M_{SL}$ , inversa a la que se obtiene tomando el signo negativo. Sin embargo, esta nueva solución  $M'_{SL}$  será mayor que  $M_{SL}$ , por lo que en la práctica, para filtros paso banda, nunca se usará la solución del signo positivo.

### 2.8.2.2 Síntesis de la matriz de admitancias $[Y_N]$

Procedamos ahora al cálculo de la matriz de parámetros ABCD de cada una de las secciones que formarán el circuito de la figura 16. Tendremos por tanto  $N$  secciones como la siguiente:

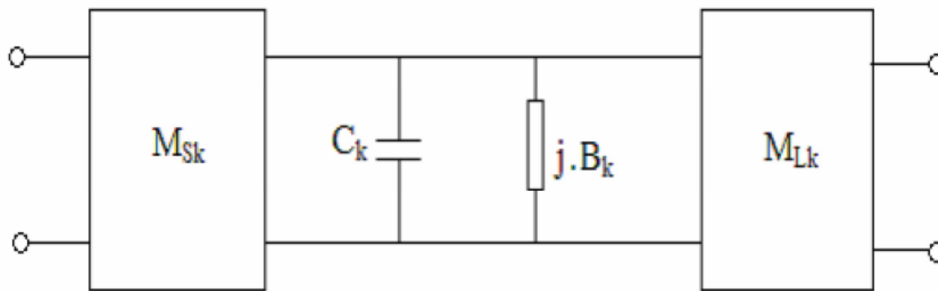


Figura 21: Sección k-ésima

Para el cálculo de la matriz total, consideraremos tres etapas conectadas en cascada, y calcularemos la matriz individual ABCD<sub>i</sub> de cada una de ellas, para posteriormente multiplicarlas y obtener la matriz ABCD de la sección k-ésima al completo:

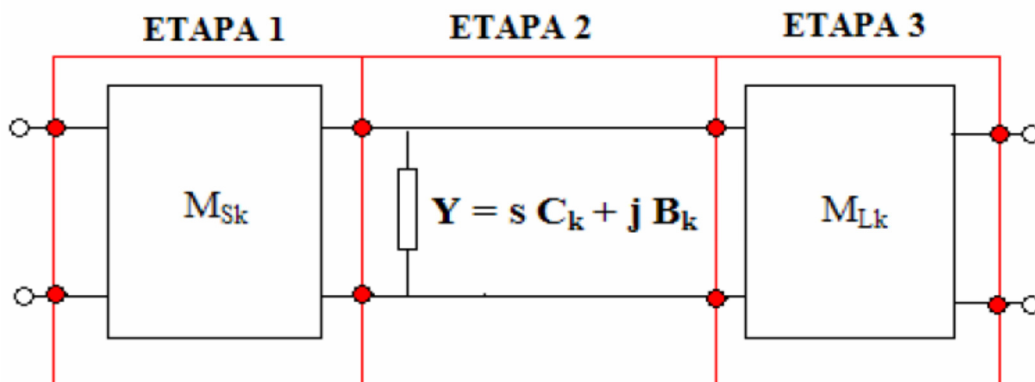


Figura 22: Etapas para el cálculo de la matriz ABCD



### ETAPA 1:

Esta etapa, consiste en un inversor admitancia, cuya admitancia características vale  $Y_c = M_{Sk}$ , y por tanto se corresponde con una línea transmisión de longitud  $l = \lambda/4$ , y una impedancia característica  $Z_c = 1/M_{Sk}$ . Sus parámetros ABCD<sub>1</sub> se pueden obtener a partir de las expresiones generales para una línea de longitud  $l$ , e impedancia característica  $Z_c$  [4]:

$$A = \cos(\beta l) \quad (2.70)$$

$$B = jZ_c \sin(\beta l) \quad (2.71)$$

$$C = jY_c \sin(\beta l) \quad (2.72)$$

$$D = \cos(\beta l) \quad (2.73)$$

Para el circuito analizado de longitud  $l = \lambda/4$  y admitancia característica  $Y_c = M_{Sk}$  esto se traduce en las siguientes ecuaciones:

$$A = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2.74)$$

$$B = j \frac{1}{M_{Sk}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}\right) = j \cdot \frac{1}{M_{Sk}} \quad (2.75)$$

$$C = jM_{Sk} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}\right) = jM_{Sk} \quad (2.76)$$

$$D = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2.77)$$

Con lo que la matriz de parámetros ABCD resulta:

$$ABCD_1 = \begin{bmatrix} 0 & j \cdot \frac{1}{M_{Sk}} \\ j \cdot M_{Sk} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

### ETAPA 2:

Esta segunda etapa consiste en una admitancia  $Y$  conectada en paralelo. Sus parámetros ABCD<sub>2</sub>, podemos obtenerlos a partir de su expresión general [4]:

$$A = 1 \quad (2.79)$$

$$B = 0 \quad (2.80)$$

$$C = Y \quad (2.81)$$

$$D = 1 \quad (2.82)$$

Por otro lado, como  $Y = sC_k + jB_k$ , la matriz de  $ABCD_2$  quedará como sigue:

$$ABCD_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC_k + jB_k & 1 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

### ETAPA 3:

Esta etapa es similar a la primera, con la diferencia de que ahora, la admitancia característica del inversor viene dada por  $M_{lk}$ . Procediendo de la misma manera que en el primer caso, obtendremos que la nueva matriz de parámetros  $ABCD_3$ :

$$ABCD_3 = \begin{bmatrix} 0 & j \cdot \frac{1}{M_{lk}} \\ j \cdot M_{lk} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Tras el cálculo de la matriz  $ABCD_i$  de cada una de las etapas, podemos obtener la matriz total  $ABCD$  como producto de las tres anteriores, es decir:

$$ABCD = \begin{bmatrix} 0 & j \cdot \frac{1}{M_{Sk}} \\ j \cdot M_{Sk} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC_k + jB_k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & j \cdot \frac{1}{M_{lk}} \\ j \cdot M_{lk} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$ABCD = \begin{bmatrix} j \cdot \frac{sC_k + jB_k}{M_{Sk}} & j \cdot \frac{1}{M_{Sk}} \\ j \cdot M_{Sk} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & j \cdot \frac{1}{M_{lk}} \\ j \cdot M_{lk} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$ABCD = \begin{bmatrix} j \frac{-M_{lk}}{M_{Sk}} & -\frac{sC_k + jB_k}{M_{Sk} \cdot M_{lk}} \\ 0 & -\frac{M_{Sk}}{M_{lk}} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Esta matriz  $ABCD$  puede convertirse de forma directa a su equivalente de matriz de parámetros  $Y$ , utilizando para ello, la siguiente expresión [4]:

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D}{B} & -\frac{(AD - BC)}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Calculando cada uno de los parámetros y por separado obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$y_{11} = \frac{D}{B} = \frac{-\frac{M_{Sk}}{M_{lk}}}{-\frac{sC_k + jB_k}{M_{Sk} \cdot M_{lk}}} = \frac{M_{Sk}^2}{sC_k + jB_k} = \frac{M_{Sk} \cdot M_{lk}}{sC_k + jB_k} \cdot \frac{M_{Sk}}{M_{lk}} \quad (2.89)$$

$$y_{12} = -\frac{(AD - BC)}{B} = -\frac{\left(-\frac{M_{lk}}{M_{Sk}} \cdot \frac{M_{Sk}}{M_{lk}}\right)}{\left(-\frac{sC_k + jB_k}{M_{Sk} \cdot M_{lk}}\right)} = \frac{M_{Sk} \cdot M_{lk}}{sC_k + jB_k} \quad (2.90)$$

$$y_{21} = -\frac{1}{B} = \frac{1}{-\frac{sC_k + jB_k}{M_{Sk} \cdot M_{lk}}} = \frac{M_{Sk} \cdot M_{lk}}{sC_k + jB_k} \quad (2.91)$$

$$y_{22} = \frac{A}{B} = \frac{-\frac{M_{lk}}{M_{Sk}}}{-\frac{sC_k + jB_k}{M_{Sk} \cdot M_{lk}}} = \frac{M_{lk} \cdot M_{Sk}}{sC_k + jB_k} \cdot \frac{M_{lk}}{M_{Sk}} \quad (2.92)$$

Entonces, la matriz de parámetros y para cada una de las secciones k-ésimas se corresponderá con la siguiente ecuación:

$$y = \frac{M_{Sk} \cdot M_{lk}}{sC_k + jB_k} \cdot \begin{bmatrix} \frac{M_{Sk}}{M_{lk}} & 1 \\ 1 & \frac{M_{lk}}{M_{Sk}} \end{bmatrix} = \frac{1}{sC_k + jB_k} \cdot \begin{bmatrix} M_{Sk}^2 & M_{Sk} \cdot M_{lk} \\ M_{Sk} \cdot M_{lk} & M_{lk}^2 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Finalmente, la matriz de admitancia en cortocircuito de dos puertos  $[Y_N]$  de la red transversal de las  $N$  secciones transversales conectadas en paralelo (figura 17), será la suma de las matrices de parámetros  $Y$  de cada una de las secciones individuales, más la matriz de parámetros  $[y_{SL}]$  del inversor directo de acoplo fuente / carga,  $M_{SL}$ , es decir:

$$[Y_N] = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} = [y_{SL}] + \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} y_{11k}(s) & y_{12k}(s) \\ y_{21k}(s) & y_{22k}(s) \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

$$[Y_N] = j \cdot \begin{bmatrix} 0 & M_{SL} \\ M_{SL} & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{sC_k + jB_k} \cdot \begin{bmatrix} M_{Sk}^2 & M_{Sk} \cdot M_{Lk} \\ M_{Sk} \cdot M_{Lk} & M_{Lk}^2 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

### 2.8.3 Síntesis completa de la matriz transversal “N+2”

A lo largo de las secciones anteriores se ha visto como expresar la matriz  $[Y_N]$  de dos formas distintas, la primera en términos de los residuos de la función de transferencia (2.43), y la segunda en términos de los elementos circuitales del array transversal (2.95). Igualando ambas expresiones obtendremos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} [Y_N] &= j \cdot \begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ K_0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{(s - j\lambda_k)} \cdot \begin{bmatrix} r_{11k} & r_{12k} \\ r_{21k} & r_{22k} \end{bmatrix} \\ &= j \cdot \begin{bmatrix} 0 & M_{SL} \\ M_{SL} & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{sC_k + jB_k} \cdot \begin{bmatrix} M_{Sk}^2 & M_{Sk} \cdot M_{Lk} \\ M_{Sk} \cdot M_{Lk} & M_{Lk}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Con lo que se pueden deducir las siguientes igualdades:

$$K_0 = M_0 \quad (2.97)$$

$$\frac{r_{21k}}{s - j\lambda_k} = \frac{M_{Sk} \cdot M_{lk}}{sC_k + jB_k} \quad (2.98)$$

$$\frac{r_{22k}}{s - j\lambda_k} = \frac{M_{Lk}^2}{sC_k + jB_k} \quad (2.99)$$

Los residuos  $r_{21k}$  y  $r_{22k}$ , y los valores propios  $\lambda_k$  ya se han obtenido de los polinomios  $S_{21}$  y  $S_{22}$  de la función de filtrado deseada, por tanto, igualando las partes reales e imaginarias de las ecuaciones (2.98) y (2.99), podremos relacionarlos directamente con los parámetros del circuito, obteniendo las siguientes expresiones:

$$C_k = 1 \quad (2.100)$$

$$B_k (\equiv M_{kk}) = -\lambda_k \quad (2.101)$$

$$M_{lk}^2 = r_{22k} \Rightarrow M_{lk} = \sqrt{r_{22k}} = T_{Nk} \quad (2.102)$$

$$M_{Sk} \cdot M_{lk} = r_{21k} \Rightarrow M_{Sk} = \frac{r_{21k}}{\sqrt{r_{22k}}} = T_{lk} \quad (2.103)$$

con  $k = 1, 2, \dots, N$

Se puede observar como  $M_{Sk}$  y  $M_{Lk}$  constituyen los vectores fila no escalados de  $T_{1k}$  y  $T_{Nk}$  de la matriz  $T$ . Esta matriz  $T$  es una matriz ortonormal ( $T \cdot T^t = T^t \cdot T = U$ ), que satisface la siguiente igualdad:

$$-M = T \cdot \Lambda \cdot T^t \quad (2.104)$$

Donde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , siendo  $\lambda_i$  los autovalores de  $-M$ . La ecuación anterior (2.104) implica que la matriz  $M$  es similar a la matriz diagonal de sus propios autovalores. Esta propiedad será desarrollada con mayor profundidad en el estudio de las rotaciones de Givens, donde se transformará esta matriz de acoplamientos en otra similar y que además presente el mismo comportamiento.

Por otro lado, los condensadores  $C_k$  de las redes paralelas son todos igual a la unidad y las susceptancias invariantes con la frecuencia son  $B_k = -\lambda_k$  (y representan los valores de la matriz  $M_{11}, M_{12}, \dots, M_{NN}$ ). Además, los acoplamientos de entrada  $M_{Sk}$ , los acoplamientos de salida  $M_{lk}$ , y el acoplamiento directo entre fuente / carga  $M_{SL}$  son todos conocidos, por lo que la matriz de acoplamientos recíproca y transversal  $N+2$  que representa la red puede construirse:

En la matriz  $N+2$  tendremos entonces que:

- Los  $M_{Sk} (= T_{lk})$  son los  $N$  acoplamientos de entrada, y ocupan la primera fila y columna de la matriz, de la posición 1 a la posición  $N$ .
- Los  $M_{lk} (= T_{Nk})$  son los  $N$  acoplamientos de salida y ocupan la última fila y columna de la matriz, de la posición 1 a la  $N$ .
- Los elementos  $M_{11}, M_{22}, \dots, M_{NN}$  se corresponden con los  $-\lambda_k$ .

- El resto de los elementos de la matriz son nulos.

Por tanto, el aspecto que tendrá esta matriz transversal  $N+2$  será el siguiente:

$N$	$S$	$I$	$2$	$3$	$\dots$	$k$	$\dots$	$N-1$	$N$	$L$
$S$	0									$M_{SL}$
$I$			0	0	0	0	0	0	0	
$2$		0		0	0	0	0	0	0	
$3$		0	0		0	0	0	0	0	
$\dots$		0	0	0		0	0	0	0	
$k$		0	0	0	0		0	0	0	
$\dots$		0	0	0	0	0		0	0	
$N-1$		0	0	0	0	0	0		0	
$N$		0	0	0	0	0	0	0		
$L$	$M_{SL}$									0

$M_{S1} M_{S2} M_{S3} M_{S4} \dots M_{Sk} \dots M_{S,N-1} \dots M_{SN}$   
  $M_{I1} M_{22} M_{S33} M_{44} \dots M_{kk} \dots M_{N-1,N-1} \dots M_{NN}$   
  $M_{L1} M_{L2} M_{L3} M_{L4} \dots M_{Lk} \dots M_{L,N-1} \dots M_{LN}$

Figura 23: Matriz transversal  $N+2$

### 2.8.3.1 Características de transferencia y reflexión a partir de la matriz “ $N+2$ ”

Para obtener la respuesta frecuencial del filtro cuando partimos de una matriz de acoplamientos “ $N+2$ ”, a la que llamaremos  $M$ , procederemos prácticamente de la misma forma que cuando tenemos una matriz  $N \times N$  [7]. La diferencia es que ahora hemos de eliminar la dependencia frecuencial de los elementos  $Z_{11}$  y  $Z_{NN}$  de la matriz total:

$$Z = sI + R + jM \quad (2.105)$$

Puesto que en este caso ya no representan un desplazamiento respecto de la frecuencia de resonancia para el primer resonador y para el último, sino que se refieren a la fuente y la carga. La diferencia será entonces que ahora la matriz diagonal  $I$  tendrá sus elementos  $I_{11}$  e  $I_{NN}$  iguales a 0, quedando una matriz total  $Z$  igual a:

$$Z = s \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_I + \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & R_N \end{bmatrix}}_R + j \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & M_{12} & \dots & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & 0 & \dots & \dots & M_{2N} \\ M_{31} & M_{32} & \dots & \dots & M_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & M_{N-1,N} \\ M_{1N} & \dots & \dots & M_{N,N-1} & 0 \end{bmatrix}}_M \quad (2.106)$$

## 2.8.4 Propiedades

La matriz de acoplamientos es una representación que contiene toda la información relevante de la red, ya que contiene los valores de los coeficientes de acoplamiento así como la topología correspondiente y las frecuencias de resonancia.

De acuerdo con los distintos elementos que forman la red, resonadores y puertos (nodos no resonantes) tendremos tres tipos distintos de acoplamientos: entre puertos, entre resonadores y entre puertos y resonadores. Cada uno de estos tipos de acoplamientos está a su vez representado por una submatriz de acoplamientos con sus características correspondientes y donde  $n$  denota el número de resonadores y  $p$  el número de puertos:

1. **Matriz de acoplamientos internos** - entre pares de resonadores. ( $M_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ): Los elementos de la diagonal de  $M_n$  representan autoacoplamientos de los resonadores, es decir, susceptancias constantes con la frecuencia conectadas en paralelo con las capacidades de los resonadores, autoacoplamientos o susceptancias invariantes. Además como la red es recíproca se cumplirá que  $M_n$  es simétrica, es decir:

$$[M_n]_{ij} = [M_n]_{ji} \quad i, j \in \{1 \dots n\} \quad (2.107)$$

Esta matriz coincidirá con la matriz de acoplamientos convencional para filtros.

2. **Matriz de acoplamientos directos entre pares de puertos:** ( $M_p \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ): Los elementos de la diagonal son autoacoplamientos o susceptancias invariantes que se unen con los terminales del puerto correspondiente. Además, como la red es recíproca, esta matriz  $M_p$  también será simétrica.

$$[M_p]_{ij} = [M_p]_{ji} \quad i, j \in \{1 \dots p\} \quad (2.108)$$

3. **Matriz de acoplamientos entre puertos y resonadores** (o acoplamientos de entrada a la red): ( $M_{pn} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ). Como, en general  $p \neq n$  (número de puertos distinto del número de resonadores), esta matriz no será cuadrada ni, por lo tanto, simétrica ya que los acoplamientos conectan dos conjuntos de nodos diferentes.

Una vez obtenidas estas matrices parciales o por bloques podemos obtener la matriz de acoplamientos correspondiente a la red completa ( $M$ ) de acuerdo con la siguiente composición de la matriz por bloques:

$$M = \begin{bmatrix} M_p & M_{pn} \\ M_{pn}^T & M_n \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Como se ha mencionado anteriormente, la matriz de acoplamientos completa  $M \in \mathbb{R}^{(p+n) \times (p+n)}$  será simétrica, como corresponde a redes recíprocas.

## 2.9 Multiplexor de microondas:

Un multiplexor de microondas es una red de más de 3 puertos ( $p \geq 3$ ) capaz de transferir señales desde  $(p-1)$  de sus puertos al otro puerto combinándolas de un modo selectivo en frecuencia. [1]

Entre cada uno de los  $(p-1)$  puertos y el puerto adicional (puerto común) se establece un canal de banda limitada por el cual idealmente la transmisión de potencia es total. Además, idealmente, las bandas de los canales no se solapanán porque suponemos que la transmisión de cada canal en las bandas restantes será nula, pero esto es para el modelo teórico, ya que para el caso real éstas serán pequeñas pero no nulas. Para minimizar el solapamiento se podrán añadir bandas de guarda entre canales, esto es, el ancho de banda de los canales será, en general, menor que la separación entre las frecuencias centrales de los canales. Esto puede ser conveniente aunque no siempre necesario para ciertos casos.

Para redes recíprocas, que son con las cuales se trabajará a lo largo de este proyecto, el comportamiento será invertible, por lo que se pueden separar las distintas componentes espectrales de la señal presente en el puerto común repartiéndolas en cada uno de los  $(p-1)$  puertos de los canales dependiendo de su frecuencia, es decir, actuando como una red demultiplexora.

Cabe destacar el hecho de que los multiplexores sintetizados mediante estos procesos de síntesis actuarán como un todo, por lo que no podrán descomponerse en filtros paso banda independientes, si bien cada uno de los canales de los que está formado el multiplexor tendrá, idealmente, el mismo comportamiento que un filtro paso banda.

Algunas de las propiedades de los multiplexores de microondas son las siguientes:

- Las pérdidas de retorno serán altas (poca reflexión) para los  $(p-1)$  puertos dentro de su banda de frecuencias.
- Las pérdidas de retorno en el puerto común mostrarán todas las bandas de paso del multiplexor, es decir, tendrá buena adaptación en todas las bandas.
- El aislamiento será elevado entre los puertos de los canales, es decir, entre los  $(p-1)$  puertos.
- El número de ceros de los coeficientes de reflexión es igual al orden. Los ceros de reflexión efectivos en cada uno de los puertos de los canales ( $S_{11}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{33}, \dots, S_{(p-1)(p-1)}$ ) son un subconjunto de los ceros de reflexión del puerto común ( $S_{pp}$ ). Además en cada uno de los puertos de los canales aparece sólo una banda de paso.

- La interacción entre las bandas de paso provocará la aparición de ceros de transmisión parciales, es decir, ceros no situados en el eje imaginario  $s = j\omega$ . Para cada canal, estos ceros se sitúan en las bandas de paso de los otros canales, cancelando en gran medida, pero no completamente, el efecto de las frecuencias propias. El efecto será rizado así como mínimos locales de transmisión en bandas contiguas.



# Capítulo 3

## Operaciones matriciales

### 3.1 Introducción

En este capítulo se estudiará, en primer lugar, el método analítico de síntesis, así como algunos de los parámetros necesarios para el desarrollo de este proceso (sección 3.2). A continuación se estudiarán algunas de las propiedades de las redes semejantes (sección 3.3), que son aquellas que presentan una misma respuesta. Posteriormente se analizarán las propiedades necesarias para obtener dichas redes semejantes, utilizando para ello las denominadas transformaciones de semejanza (sección 3.4) tales como las rotaciones de Givens.

Adicionalmente se definirá el concepto de grafo plano (sección 3.5), ya que éstos serán importantes a la hora de representar matrices de acoplamientos o topologías. Esta representación será estudiada más en profundidad en la sección 3.6, donde se explicará el método implementado para el realizar esta tarea. Así mismo se ilustrarán algunos ejemplos para explicar de manera más detallada su funcionamiento. Finalmente se terminará con unas conclusiones (sección 3.7).

## 3.2 Método analítico de síntesis

Aunque los distintos métodos de síntesis se verán con más detalle en el siguiente capítulo, a continuación se describirá el proceso necesario para obtener la matriz de acoplamientos a partir de las especificaciones y se estudiarán algunas propiedades adicionales a las vistas (sección 2.7.3) de la matriz de acoplamientos.

El algoritmo para obtener matrices de acoplamiento es conocido como síntesis. Un problema de síntesis consiste en la obtención de una red eléctrica, tanto de su estructura como de los valores de sus componentes, cuyo comportamiento sea uno previamente especificado.

Sin embargo, un algoritmo de síntesis analítica utiliza como datos de entrada los parámetros de admitancia en cortocircuito expresados como polinomios racionales, y dado que esta topología no es adecuada se requerirán métodos adicionales para transformar la red obtenida en otra con la misma respuesta. En los siguientes apartados se describen más en profundidad estos problemas así como los procedimientos necesarios para su resolución. (Ampliamente descritos en [1])

### 3.2.1 Parámetros de admitancia en cortocircuito

El algoritmo de síntesis requiere como dato de partida la respuesta en frecuencia requerida, especificada en forma de parámetros de admitancia en cortocircuito. Por este motivo será conveniente definir previamente estos parámetros como  $Y \in \mathbb{C}^{p \times p}$  de tal modo que se cumpla la siguiente igualdad:

$$i_p = Y v_p \quad (3.1)$$

Donde  $v_p$  e  $i_p$  son los vectores de tensión y corriente de excitación de los  $p$  puertos de la red.

Utilizando el principio de superposición válido para redes lineales es posible definir cada coeficiente  $Y$  de forma independiente, cargando únicamente un puerto de referencia y cortocircuitando el resto (por este motivo estos parámetros son conocidos como parámetros de admitancia en cortocircuito), resultando la siguiente ecuación:

$$[Y]_{kl} \triangleq \frac{[i_p]_k}{[v_p]_l} \Big|_{\substack{[v_p]_m=0 \\ m \neq l}} \quad k, l, m \in \{1, \dots, p\} \quad (3.2)$$

Como se trabajará con redes recíprocas, se cumplirá que  $[Y]_{lk} = [Y]_{kl}$ , es decir, la matriz de admitancias en cortocircuito será simétrica.

Si se define una nueva matriz  $A$  o matriz de admitancias de los nodos de una red sin pérdidas tal que:

$$A(s) = G + sC + jM \quad (3.3)$$

Siendo  $C$  la matriz que define la capacidad resonante de los nodos de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \\ & U_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Donde  $U_n$  es la matriz identidad.

La capacidad de cada nodo refleja su carácter resonante, esto es su equivalente paso bajo de un resonador LC paralelo. El coeficiente  $[C]_{kk}$  será igual a la unidad en caso de que  $k$  sea el índice de un nodo resonante y cero en caso contrario.

Por otro lado, la matriz  $G$  denota las conductancias de los nodos, que serán iguales a las conductancias de carga o de referencia en el caso de los puertos ( $G_p$ ), y para el caso de los resonadores serán las de las pérdidas ( $G_n$ ).

La matriz  $G_p$  variará de si lo que se pretende es calcular los parámetros de impedancia en circuito abierto, en cuyo caso serán nulas o los parámetros  $S$ , en cuyo caso será conveniente que sean iguales a la unidad, es decir:

$$G_p|_{par,Z} = 0 \quad G_p \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (3.5)$$

$$G_p|_{par,S} = U_p \quad G_p \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (3.6)$$

Para el caso de los resonadores, las conductancias de los nodos serán las de pérdidas. Estas conductancias serán nulas para redes sin pérdidas, y mayores que cero en otro caso, con un valor igual al factor de disipación. Este factor permite incluir el efecto de las pérdidas en la respuesta del modelo de banda estrecha de cada resonador.

La submatriz  $G_n$  será inversamente proporcional al factor de calidad intrínseco del resonador y al ancho de banda relativo empleado en la normalización paso banda - paso bajo, es decir, esta nueva submatriz  $G_n$  de conductancias de los resonadores se definirá de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$G_n = \frac{f_0}{\Delta f} \begin{bmatrix} Q_{0,1}^{-1} & & \\ & Q_{0,2}^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & Q_{0,n}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Para el caso de redes sin pérdidas, que son con las que se trabajará a lo largo de este proyecto, esta matriz tomará el valor nulo, es decir:

$$G_n = 0 \quad (3.8)$$

Como la ecuación (3.1) se debe satisfacer para cualquier condición de carga de la red, las conductancias de los puertos podrán extraerse de ella, con lo que resulta que  $G=0$  y  $A=sC+jM$ .

Sea además la siguiente partición de  $A$ , con submatrices de las mismas dimensiones que las utilizadas para definir  $M$  en (2.109):

$$A \triangleq \begin{bmatrix} A_p & A_{pn} \\ A_{pn}^T & A_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Y sean las correspondientes particiones de los vectores de tensiones y corrientes de excitación de los nodos que se muestran a continuación:

$$v = \begin{bmatrix} v_p \\ v_n \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} i_p \\ i_n \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

De acuerdo con estas definiciones, el sistema de ecuaciones de la red resulta de la siguiente manera:

$$i_p = A_p v_p + A_{pn} v_n \quad (3.11)$$

$$i_n = A_{pn}^T v_p + A_n v_n \quad (3.12)$$

Dado que no hay excitaciones en el interior de la red,  $i_n=0$ , con lo que la matriz de parámetros de admitancia resulta:

$$Y(s) = A_p - A_{pn} A_n^{-1} A_{pn}^T \quad (3.13)$$

La submatriz de acoplamientos internos de la red  $M_n$  es real y simétrica., por lo que sus autovalores  $\{-\lambda_k\}_{k \in \{1, \dots, n\}}$  son reales y tiene un conjunto completo de  $n$  autovectores reales,  $\{\xi_k \in \mathbb{R}^n\}_{k \in \{1, \dots, n\}}$  donde, por definición, se satisfacen las  $n$  condiciones que relacionan cada autovalor con su correspondiente autovector,

$$(\lambda_k U_n - M_n) \xi_k = 0 \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (3.14)$$

Por lo que la siguiente representación espectral de  $M_n$  seguirá siendo válida:

$$M_n = - \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \xi_k^T \quad (3.15)$$

Debido a la ortonormalidad de los autovectores, también se cumplen las dos propiedades siguientes que serán necesarias posteriormente:

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \xi_k^T = U_n \quad (3.16)$$

$$\xi_k \xi_k^T = \delta_{k,l} \quad (3.17)$$

La representación espectral de  $M_n$ , junto con la propiedad de la ecuación (3.16), permiten desarrollar la submatriz  $A_n$  de acuerdo con la siguiente expresión:

$$A_n = sU_n + jM_n = \sum_{k=1}^n (s - j\lambda_k) \xi_k \xi_k^T \quad (3.18)$$

Por su parte, la representación de  $A_n^{-1}$  se obtiene a partir del resultado anterior y de la propiedad (3.17):

$$A_n^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k \xi_k^T}{s - j\lambda_k} \quad (3.19)$$

Incorporando esta expresión a la ecuación (3.13) y sustituyendo el resto de las submatrices de  $A$  por sus correspondientes valores, el desarrollo de  $Y(s)$  puede expresarse de acuerdo con las siguientes igualdades:

$$Y(s) = jM_p + M_{pn} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k \xi_k^T}{s - j\lambda_k} \right) M_{pn}^T = jM_p + \sum_{k=1}^n \frac{M_{pn} \xi_k \xi_k^T M_{pn}^T}{s - j\lambda_k} \quad (3.20)$$

Por sencillez en la notación se define un nuevo conjunto de vectores  $\{\gamma_k \in \mathbb{R}^p\}_{k \in \{1, \dots, n\}}$  como sigue:

$$\gamma_k \triangleq M_{pn} \xi_k \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (3.21)$$

Puesto que los coeficientes de  $M_{pn}$  y  $\xi_k$  son reales, también lo serán los de  $\gamma_k$ , con lo que la expresión (3.20) se simplifica, resultando en la siguiente ecuación:

$$Y(s) = jM_p + \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k \gamma_k^T}{s - j\lambda_k} \quad (3.22)$$

### 3.2.2 Expansión en fracciones parciales de los parámetros de admitancia

La expansión en fracciones parciales de la matriz de admitancias en cortocircuito tiene la siguiente forma general:

$$Y(s) = Y^{(\infty)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s - j\lambda_k} \Gamma_k \quad (3.23)$$

Donde  $Y^{(\infty)} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es el término directo de la expansión, es decir:

$$Y^{(\infty)} = \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) \quad (3.24)$$

$\{j\lambda_k\}_{k \in \{1, \dots, n\}}$  es el conjunto de polos comunes a todos los coeficientes de admitancia y  $\Gamma_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es el residuo asociado al  $k$ -ésimo polo. Esta expansión en fracciones parciales de una matriz puede interpretarse como un conjunto de expansiones parciales de cada uno de los coeficientes, teniendo en cuenta que los polos son únicos y comunes a todos ellos.

Cada una de las  $n$  matrices residuo se representa de acuerdo con la siguiente notación:

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} r_{11,k} & r_{12,k} & \dots & r_{1p,k} \\ r_{21,k} & r_{22,k} & \dots & r_{2p,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1,k} & r_{p2,k} & \dots & r_{pp,k} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Por otro lado, cada parámetro de admitancia en cortocircuito puede representarse mediante una expresión en fracciones parciales escalar, es decir, convencional:

$$[Y(s)]_{ij} = [Y]_{ij}^{(\infty)} + \sum_{k=1}^n \frac{r_{ij,k}}{s - j\lambda_k} \quad i, j \in \{1, \dots, p\} \quad (3.26)$$

Las ecuaciones (3.22) y (3.23) son idénticas si se identifican los términos directos y los residuos matriciales, esto es:

$$Y^{(\infty)} = jM_p \quad (3.27)$$

$$\Gamma_k = \gamma_k \gamma_k^T \quad (3.28)$$

### 3.2.2.1 Condiciones de realizabilidad

La expansión en fracciones parciales de la matriz de admitancias en cortocircuito  $Y$  permite caracterizar las condiciones de realizabilidad de una red, es decir, las propiedades que ha de presentar la respuesta en frecuencia si esta es producida por una red de resonadores acoplados. Estas condiciones son las siguientes:

- El conjunto de  $n$  polos de los parámetros de admitancia es común a todos ellos. Los polos estarán situados en el eje imaginario del plano complejo  $s$ .
- Los parámetros de admitancia tienen un máximo de  $n-1$  ceros.
- Los  $n$  residuos del parámetro de admitancia  $[Y]_{ij}$  son de la forma  $r_{ij,k} = [\gamma_k]_i [\gamma_k]_j$ . Por tanto, presentan las siguientes propiedades:

1. Puesto que  $\gamma_k \in \mathbb{R}^p$ , los residuos serán reales.
2. Los residuos de los elementos de la diagonal de  $Y$  son positivos, es decir:

$$r_{ii,k} = [\gamma_k]_i^2 \geq 0 \quad (3.29)$$

3. Los residuos de todos los elementos de  $Y$  están relacionados con los de los elementos de la diagonal de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$r_{ii,k}^2 = ([\gamma_k]_i [\gamma_k]_j)^2 = r_{ii,k} r_{jj,k} \quad (3.30)$$

### 3.2.3 Redes con topología transversal y número arbitrario de puertos

Las redes con topología transversal o redes transversales son aquellas que presentan las siguientes características:

1. No existen acoplamientos internos, es decir, acoplamientos entre resonadores, por lo que la matriz  $M_n$  será diagonal (solamente aparecerán los autoacoplamientos de los resonadores).
2. En general, cada resonador, estará acoplado con cada uno de los puertos.

Las redes con estructura transversal presentan una propiedad que las hace interesantes como herramientas de síntesis: son las únicas cuya submatriz de acoplamientos internos de la red  $M_n$  es diagonal. Como consecuencia sus autovectores son de la forma  $\xi_k = \delta_k$  y por tanto:

$$\gamma_k = [M_{pn}]_{col,k} \quad (3.31)$$

Esto permite encontrar una relación entre los residuos de los parámetros de admitancia y los coeficientes de acoplamientos. Esto constituye el procedimiento de síntesis que se estudiará en las siguientes secciones.

### 3.2.4 Matriz de parámetros de admitancia de redes transversales

Las redes multipuerto transversales se pueden descomponer en dos tipos de subredes, también de  $p$  puertos:

1.  $n$  subredes de orden uno, con un único resonador cada una.
2. Una red de acoplamientos directos entre los puertos, independiente de la frecuencia.

La red completa estará formada por la conexión en paralelo de estas  $n+1$  subredes. Por lo tanto, la representación más adecuada tanto de dicha red como de sus componentes hará uso de matrices de admitancia en cortocircuito. De acuerdo con esto, la matriz total será la suma de las matrices de los elementos que se conectan en paralelo.

Cada una de las  $n$  ramas de orden uno del equivalente paso bajo de la red multipuerto transversal se compone de un resonador conectado a los  $p$  puertos mediante sendos inversores de admitancia. El resonador estará compuesto, a su vez, de una capacidad conectada en paralelo a una susceptancia independiente de la frecuencia.

Los coeficientes de los elementos circuitales que forman cada rama toman los siguientes valores:

- Capacidad unitaria.
- Valor de la susceptancia:  $j[M_n]_{kk}$
- Coeficientes de los  $p$  inversores de admitancia:  $[M_{pn}]_{1k}$  hasta  $[M_{pn}]_{pk}$

Los coeficientes de la matriz de admitancias en cortocircuito de cada rama se pueden calcular aplicando su definición, en función de las corrientes y tensiones presentes en cada puerto de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$[Y_k(s)]_{ij} = \frac{i_l(s)}{v_j(s)} \Big|_{v_i=0, \forall l \neq j} \quad i, j \in \{1, \dots, p\} \quad (3.32)$$

Esto implica que para calcular los parámetros de admitancia respecto al puerto  $j$  será necesario cortocircuitar todos los demás puertos. Debido a la propiedad de transformación de impedancias de los inversores, cada puerto así cortocircuitado aparecerá como un circuito abierto en el nodo del resonador. El resultado equivale a eliminar todos los puertos y sus correspondientes inversores, salvo los implicados en la operación  $i, j$  tal y como se muestra en la siguiente figura:

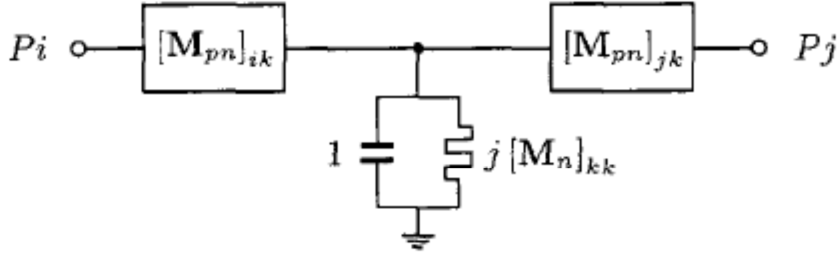


Figura 24: Resonador con todos los puertos cortocircuitados, salvo dos ( $i$  y  $j$ )

Un sencillo análisis del cuadripolo permite obtener la expresión de cada parámetro de admitancia en cortocircuito de la rama  $k$ -ésima de acuerdo con la siguiente igualdad:

$$Y_k(s) = \frac{[M_{pn}]_{ik} [M_{pn}]_{jk}}{s + j[M_n]_{kk}} \quad i, j \in \{1, \dots, p\} \quad (3.33)$$

Conocidos todos los coeficientes de admitancia en cortocircuito de la rama, puede construirse la matriz completa de la siguiente manera:

$$Y_k(s) = \frac{1}{s + j[M_n]_{kk}} \begin{bmatrix} [M_{pn}]_{1k}^2 & [M_{pn}]_{1k} [M_{pn}]_{2k} & \dots & [M_{pn}]_{1k} [M_{pn}]_{pk} \\ [M_{pn}]_{2k} [M_{pn}]_{1k} & [M_{pn}]_{2k}^2 & \dots & [M_{pn}]_{2k} [M_{pn}]_{pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [M_{pn}]_{pk} [M_{pn}]_{1k} & [M_{pn}]_{pk} [M_{pn}]_{2k} & \dots & [M_{pn}]_{pk}^2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

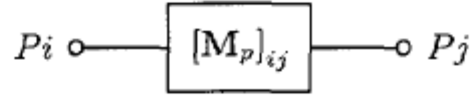
$$Y_k(s) = \frac{1}{s + j[M_n]_{kk}} \begin{bmatrix} [M_{pn}]_{1k} \\ [M_{pn}]_{2k} \\ \vdots \\ [M_{pn}]_{pk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [M_{pn}]_{1k} & [M_{pn}]_{2k} & \dots & [M_{pn}]_{pk} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Como se puede observar, esta matriz se corresponde con una red recíproca, pues es simétrica, de orden uno, con su única frecuencia propia en  $s = -j[M_n]_{kk}$ .

De un modo análogo se puede obtener la matriz de admitancias correspondientes al conjunto de acoplamientos directos de la red. Estos acoplamientos pueden ser representados mediante inversores de admitancia constantes con la frecuencia. Como en el caso de las ramas de los resonadores, los parámetros de admitancia se pueden derivar



directamente de su definición, con lo que la ecuación (3.33) sigue siendo válida. Esto supone cortocircuitar sucesivamente los puertos de la red salvo los dos que intervienen en el cálculo. Debido a los inversores, un puerto cortocircuitado aparecerá en los otros puertos como un circuito abierto, con lo que puede eliminarse, junto con todos los acoplamientos que llegan a él. El resultado es nuevamente una red de dos puertos, que en este caso se reduce a un simple inversor, tal y como se ilustra en la siguiente figura:



**Figura 25:** Red de acoplamientos con todos los puertos cortocircuitados salvo dos, ( $i$  y  $j$ )

Cada coeficiente de admitancia en circuito abierto es por tanto:

$$[Y^{(\infty)}]_{ij} = j[M_p]_{ij} \quad i, j \in \{1, \dots, p\} \quad (3.36)$$

Y la matriz completa puede expresarse como sigue:

$$Y^{(\infty)} = jM_p \quad (3.37)$$

La matriz  $Y^{(\infty)}$  presenta las siguientes características:

- Es independiente de la frecuencia, ya que así lo son los inversores de admitancia. Este será el único término invariante con la frecuencia.
- Es simétrica porque la red es recíproca.
- Los elementos de la diagonal son nulos. El cálculo de  $[Y^{(\infty)}]_{ij}$  requiere cortocircuitar todos los puertos salvo el puerto  $i$ , con lo que la red completa puede eliminarse, permaneciendo únicamente dicho puerto en circuito abierto. La admitancia correspondiente, es por tanto, nula.

Por lo tanto, cada red transversal estará formada por la conexión en paralelo de  $n$  subredes de orden uno, representadas mediante las matrices  $Y_k(s)$ , y de la red invariante de acoplamientos directos, representada por  $Y^{(\infty)}$ . La matriz de admitancias en cortocircuito de la red completa puede expresarse como sigue:

$$Y(s) = Y^{(\infty)} + \sum_{k=1}^n Y_k(s) \quad (3.38)$$

Por otro lado, la estructura especial de las matrices  $Y_k(s)$  como producto de un vector columna por su transpuesto, tal y como se indica en la ecuación (3.35), permite escribir la ecuación anterior (3.38) de una forma más compacta. Es fácil comprobar cómo, añadiendo filas y columnas de ceros a los términos de (3.35) y transformando dichos términos en matrices, el resultado no se ve alterado, tal y como demuestra la siguiente igualdad:

$$Y_k(s) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & [M_{pn}]_{1k} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & [M_{pn}]_{pk} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{s+j[M_n]_{kk}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ [M_{pn}]_{1k} & \cdots & [M_{pn}]_{pk} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Donde sólo la fila o columna  $k$ -ésima de cada matriz contiene elementos no nulos. Nótese que para cada valor de  $k$ , las filas y columnas no nulas son diferentes. La operación de suma se reduce por tanto a una concatenación de filas y columnas no nulas.

Las matrices primera y tercera de la expresión (3.39) generarán dos matrices traspuestas, e iguales a  $M_{pn}$  y  $M_{pn}^T$ , salvo una posible reordenación de sus columnas y filas, respectivamente, que no supone pérdida de generalidad. Por su parte, la segunda matriz de (3.39) da lugar a una matriz diagonal que, aplicando la misma reordenación de elementos, se relaciona con  $M_n$  de acuerdo con la siguiente igualdad:

$$\text{diag}[(s + j[M_n]_{kk})^{-1}]_{k=1,\dots,n} = \text{diag}[(sU_n + jM_n)_{kk}^{-1}]_{k=1,\dots,n} \quad (3.40)$$

Donde  $U_n$  es la matriz unidad (o identidad) de dimensión  $n \times n$ . Puesto que la matriz es diagonal, se cumplirá también esta ecuación:

$$[(sU_n + jM_n)^{-1}]_{kk} = ([sU_n + jM_n]_{kk})^{-1}, \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (3.41)$$

El resultado completo para el sumatorio de (3.37) es por tanto, el siguiente:

$$\sum_{k=1}^n Y_k(s) = M_{pn}(sU_n + jM_n)^{-1}M_{pn}^T \quad (3.42)$$

Finalmente, las ecuaciones (3.37) y (3.40) permiten obtener la expresión analítica completa de la matriz de parámetros de admitancia en cortocircuito de una red transversal con un número arbitrario de puertos de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$Y(s) = jM_p + M_{pn}(sU_n + jM_n)^{-1}M_{pn}^T \quad (3.43)$$

### 3.2.5 Identificación de coeficientes de la matriz de admitancia

De acuerdo con los resultados obtenidos, se ha podido constatar que la matriz de admitancias en cortocircuito puede expresarse como sumas de términos simples, de orden cero y uno. La ecuación (3.23) representa la expansión en fracciones simples de una matriz de admitancias genéricas, definida como cociente de polinomios o mediante sus polos y ceros. Por otro lado, la ecuación (3.43) representa la respuesta de una red concreta como resultado de un análisis circuital.

El siguiente paso del procedimiento de síntesis consiste en identificar término a término estas expresiones, ligando de este modo la especificación matemática de la respuesta en frecuencia con la implementación física en forma de circuito. En concreto, el objetivo será encontrar expresiones cerradas que relacionen los coeficientes, matriciales y escalares, de la expansión en fracciones simples de  $Y(s)$ , es decir, su polos, residuos y término directo, con los elementos de la matriz de acoplamientos.

### 3.2.5.1 Término de orden cero

El término empleado para el término directo de la expansión de  $Y(s)$  en (3.24) coincide con la notación de la matriz correspondiente a la subred de acoplamientos directos entre los puertos (3.37). Esta coincidencia no es casual, ya que ambas matrices constituyen el término de orden cero, invariante con la frecuencia, de las correspondientes expresiones de  $Y(s)$ , y si dichas expresiones son iguales pasa a ser la misma matriz.

Partiendo de la ecuación (3.37) se puede despejar la matriz de acoplamientos directos entre acoplamientos directos entre puertos  $M_p$  resultando la siguiente igualdad:

$$M_p = -jY^{(\infty)} \quad (3.44)$$

Esta relación permite formular algunas de las características comunes de las matrices  $M_p$  y  $Y^{(\infty)}$ .

- Dado que los coeficientes de acoplamiento son reales, los elementos de  $Y^{(\infty)}$  son imaginarios puros.
- Los elementos de ambas matrices serán distintos de cero si y sólo si existe acoplamiento directo entre la pareja de puertos correspondiente, es decir, para redes cuya respuesta de transmisión entre puertos tiende a anularse para frecuencias muy alejadas de la banda de resonancia de los resonadores (un comportamiento paso banda en sentido estricto), se cumplirá que  $M_p = jY^{(\infty)} = 0$ .
- Además los elementos de la diagonal de ambas matrices serán nulos.

### 3.2.5.2 Término de orden uno

De un modo análogo, también se pueden identificar los términos dependientes de la frecuencia en las expresiones de  $Y(s)$  (3.23) y (3.43). La igualdad resultante es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{s - j\lambda_k} \Gamma_k = M_{pn}(sU_n + jM_n)^{-1} M_{pn}^T \quad (3.45)$$

El carácter de suma del término de la derecha de la igualdad anterior no es explícito, pero (3.42) lo pone de manifiesto. El número de sumandos es además igual para

ambos términos e igual al orden de la red,  $n$ . Todo ello se pone de manifiesto en la expresión del coeficiente de coordenada  $(i,j)$  de la anterior igualdad matricial:

$$\sum_{k=1}^n \frac{r_{ij,k}}{s - j\lambda_k} = \sum_{k=1}^n \frac{[M_{pn}]_{ik} [M_{pn}]_{jk}}{s + j[M_n]_{kk}} \quad i, j \in \{1, \dots, p\} \quad (3.46)$$

La identificación de términos a ambos lados de las igualdades (3.45) y (3.46), y que contienen la dependencia de la frecuencia permite despejar la matriz de acoplamientos internos de la red,  $M_n$ . Dado que éstos términos aparecen como denominadores de los  $n$  sumandos de orden uno, determinan directamente los polos de los parámetros de admitancia en cortocircuito. Como ya se mencionó con anterioridad,  $M_n$  es diagonal en el caso de redes transversales, es decir, tendrá el siguiente aspecto:

$$M_n = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Por supuesto, cualquier reordenación de los  $n$  polos  $\lambda_k$  da lugar a otra solución igualmente válida, pues esto no supone pérdida de generalidad, ya que sólo implica un cambio una numeración de los resonadores de la red transversal en otro orden.

Una vez fijada la matriz  $M_n$ , es decir, la correspondencia entre polos y resonadores de la red transversal, también puede obtenerse una relación entre la matriz de residuos asociados al polo  $k$ -ésimo de los parámetros de admitancia y los elementos correspondientes de la matriz de acoplamientos de entrada y salida  $M_{pn}$ . Para ello se han de identificar uno a uno los términos de (3.45) correspondientes a cada uno de los  $n$  polos de la red:

$$r_{ij,k} = [M_{pn}]_{ik} \cdot [M_{pn}]_{jk} \quad i, j \in \{1, \dots, p\}, \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (3.48)$$

La representación matricial de (3.47) es la siguiente:

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} [M_{pn}]_{1k} \\ [M_{pn}]_{2k} \\ \vdots \\ [M_{pn}]_{pk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [M_{pn}]_{1k} & [M_{pn}]_{2k} & \dots & [M_{pn}]_{pk} \end{bmatrix} \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (3.49)$$

La ecuación (3.48) permite despejar los coeficientes de  $M_{pn}$  en función de los residuos  $r_{ij,k}$ . Sin embargo, se observará un comportamiento diferente de acuerdo con esta ecuación dependiendo del valor del subíndice  $k$ .

Si se escogen los subíndices de modo que  $i = j$ , se obtiene la siguiente igualdad:

$$r_{ii,k} = [M_{pn}]_{ik}^2 \quad (3.50)$$

Esta ecuación es equivalente a la siguiente:

$$[M_{pn}]_{ik} = \pm \sqrt{r_{ii,k}} \quad (3.51)$$

El hecho de que el resultado anterior sea independiente del valor particular del subíndice  $i$  produce un sistema de ecuaciones sobredeterminado, con más ecuaciones que incógnitas. La ecuación para que este sistema sea compatible es (3.48) y que se verifica para todas las redes formadas por resonadores acoplados y es, por tanto, condición de realizabilidad.

La ambigüedad de la ecuación (3.51) permite elegir el signo de  $[M_{pn}]_{ik}$  para un valor arbitrario del índice  $i$ . Sin embargo, esta elección fija los signos del resto de coeficientes de  $[M_{pn}]_{jk}$ . De nuevo, a partir de (3.48) se obtiene la siguiente relación de signos:

$$\text{sgn}(r_{ij,k}) = \text{sgn}([M_{pn}]_{ik}) \text{sgn}([M_{pn}]_{jk}) \quad (3.52)$$

Donde  $\text{sgn}(\cdot)$  es la función signo.

Si se elige arbitrariamente que  $\text{sgn}([M_{pn}]_{ik})=1$ , es decir:

$$[M_{pn}]_{ik} = \sqrt{r_{ii,k}} \quad (3.53)$$

Combinando (3.51) y (3.52) se obtiene la expresión no ambigua del resto de coeficientes de  $M_{pn}$ :

$$[M_{pn}]_{jk} = \text{sgn}(r_{ij,k}) \sqrt{r_{ii,k}} \quad i \neq j \quad (3.54)$$

En el caso de que  $\text{sgn}(r_{ij,k}) \neq 0$  y aplicando la definición de  $\text{sgn}(\cdot)$  y (3.30), esta expresión será equivalente a la siguiente ecuación:

$$[M_{pn}]_{jk} = \frac{r_{ij,k}}{|r_{ij,k}|} \sqrt{r_{jj,k}} = \frac{r_{ij,k}}{\sqrt{r_{ii,k}}} \quad i \neq j \quad (3.55)$$

Por el contrario, si  $\text{sgn}(r_{ij,k}) = 0$  entonces  $[M_{pn}]_{jk} = 0$ , y como  $\text{sgn}([M_{pn}]_{ik}) = 1$  y por tanto  $r_{ij,k} \neq 0$ , el resultado anterior sigue siendo válido. Además los subíndices  $i$  y  $j$  coinciden, por lo que este resultado se reduce a (3.53), con lo que puede generalizarse, resultando en la siguiente expresión:

$$[M_{pn}]_{jk} = \frac{r_{ij,k}}{\sqrt{r_{ii,k}}} \quad (3.56)$$

Sin embargo, este razonamiento no es completamente general, pues existen otros dos casos posibles como resultado de la resolución de la ambigüedad producida por la ecuación (3.51):

1. En lugar de elegir  $\text{sgn}([M_{pn}]_{ik})=1$  (la cual produce como resultado (3.53), puede elegirse:

$$[M_{pn}]_{ik} = -\sqrt{r_{ii,k}} \quad (3.57)$$

Este razonamiento es idéntico al anterior salvo por la aparición del signo negativo en todos los términos, produciendo el siguiente resultado final:

$$[M_{pn}]_{jk} = -\frac{r_{ij,k}}{\sqrt{r_{ii,k}}} \quad (3.58)$$

Esta solución supone un cambio de signo de los coeficientes de todos los inversores de la red, o lo que es lo mismo, la introducción de desfases de  $\pi$  rad en los acoplamientos. Dichos desfases se cancelarán dos a dos, por lo que la solución será realmente la misma que la obtenida usando los signos positivos.

2. Otra posibilidad sería que  $r_{ii,k} = 0$ , con lo que realmente no existiría ambigüedad de signo. En este caso bastaría con elegir otro valor del subíndice  $i$  de modo que el residuo  $r_{ii,k}$  no fuese nulo. Si esto no fuese posible, es decir, si  $r_{ii,k} = 0$  para todo  $i$ , entonces, según (3.30) resulta que :

$$r_{ij,k} = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, p\} \quad (3.59)$$

Por lo tanto, la matriz residuo  $\Gamma_k$  y todos los acoplamientos  $[M_{pn}]_{ik}, i \in \{1, \dots, p\}$  serán nulos. Es decir, en esta situación el resonador  $k$ -ésimo se encontrará totalmente desacoplado de los puertos (y del resto de resonadores, ya que se trataba una red transversal), o lo que es lo mismo, aislado. La red es realmente de orden menor que  $n$ , y las filas y columnas de la matriz de acoplamientos correspondientes al resonador desacoplado pueden eliminarse, ya que no afectan al comportamiento de la red.

Como conclusión del razonamiento sobre los casos particulares cabe destacar el hecho de que la ecuación (3.56) cubrirá todos los casos de interés, por lo que puede considerarse general. Dicha expresión de los coeficientes también da lugar a la siguiente ecuación para la matriz de acoplamientos puerto-carga completa:

$$M_{pn} = \begin{bmatrix} r_{1i,k} & r_{1i,k} & \dots & r_{1i,k} \\ r_{2i,k} & r_{2i,k} & \dots & r_{1i,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{pi,k} & r_{pi,k} & \dots & r_{pi,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{ii,1} & & & \\ & r_{ii,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_{ii,n} \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.60)$$

Donde, como se ha detallado previamente,  $i$  es un valor determinado pero arbitrario tal que  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Por último cabe destacar dos propiedades de esta ecuación (3.60):

- El significado del exponente de la segunda matriz es simple, ya que al ser ésta diagonal se cumplirá la siguiente igualdad:

$$[diag(x_i)]^\alpha = diag(x_i^\alpha) \quad (3.61)$$

- Aunque en (3.60) sólo se ha indicado un único subíndice  $i$ , pueden elegirse valores diferentes para cada columna de las matrices, resultando en la siguiente ecuación completa general:

$$M_{pn} = \begin{bmatrix} r_{1i_1,k} & r_{1i_2,k} & \dots & r_{1i_n,k} \\ r_{2i_1,k} & r_{2i_2,k} & \dots & r_{1i_n,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{pi_1,k} & r_{pi_2,k} & \dots & r_{pi_n,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{i_1i_1,1} & & & \\ & r_{i_2i_2,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_{i_ni_n,n} \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.62)$$

Donde los diferentes subíndices  $\{i_l, \dots, i_n\}$  se eligen de entre el conjunto  $\{1, \dots, p\}$ . Esta modificación de la ecuación  $M_{pn}$ , que en principio puede aparecer un aumento innecesario de la complejidad, es en ocasiones, necesaria para resolver el problema de residuos nulos  $r_{ii,k}$ . Como se ha explicado, siempre será posible encontrar al menos un residuo no nulo, pero en general, su coeficiente  $i$  será diferente para resonador  $k$ .

### 3.2.6 Algoritmo de síntesis de redes transversales

El resumen del procedimiento a seguir para la síntesis de redes con múltiples puertos es el siguiente:

1. Inicialmente se parte con los parámetros de admitancia en cortocircuito de la red a sintetizar, contenidos en la matriz  $Y(s)$  y representados como cocientes de polinomios con denominador común.
2. Se desarrolla la matriz de admitancias en cortocircuito  $Y(s)$  en forma de expansión en fracciones parciales.
3. Se identifican cada uno de los coeficientes matriciales y escalares de la expansión (residuos, polos y término directo) y a partir de ellos se calculan las submatrices  $M_p$ ,  $M_{pn}$  y  $M_n$  según se indica en la siguiente tabla:

MODELO CIRCITAL		MATRIZ DE ADMITANCIAS	
TIPO	MATRIZ	ECUACIÓN	TÉRMINO
Acoplamientos entre puertos	$M_p$	$-jY^{(\infty)}$	Término directo
Acoplamientos internos	$M_n$	$\begin{bmatrix} -\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\lambda_n \end{bmatrix}$	Polos
Acoplamientos puerto-resonador	$M_{pn}$	$\begin{bmatrix} r_{1i,1} & \dots & r_{1i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{pi,1} & \dots & r_{pi,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{ii,1} & & \\ & \ddots & \\ & & -r_{ii,n} \end{bmatrix}^{-1/2}$	Residuos

**Tabla 1: Valores de los coeficientes de acoplamientos de las redes transversales**

4. Por último, se reconstruye la matriz de acoplamientos completa  $M$  a partir de las submatrices que la forman de acuerdo con (2.109).

### 3.2.7 Transformación de la matriz de acoplamientos

Las estructuras con topología de acoplamientos transversal no son deseables a la hora de implementar una red con múltiples puertos debido a los siguientes motivos:

- Salvo en casos sencillos (número de canales u órdenes bajos), es difícil o incluso imposible, acoplar un puerto a la red a varios resonadores, por varias causas:
  - Limitaciones geométricas. Los resonadores acoplados deberán ser adyacentes a los puertos, que son los puntos de entrada. Por tanto, estarán próximos entre sí, y puesto que su tamaño es finito, su número y disposición estarán limitados. Para el caso de dispositivos construidos utilizando alguna tecnología plana y con acoplamiento de entrada a una línea de transmisión por proximidad, podrán disponerse dos resonadores, uno a cada lado de la línea, pero no más.
  - Limitaciones eléctricas. Los acoplamientos de entrada son fuertes y un puerto acoplado a varios resonadores implica también un acoplamiento entre ambos resonadores, lo que implicará una topología de acoplamientos no transversal.
- Si acoplamos varios puertos a un único resonador tendremos una limitación eléctrica ya que las estructuras de acoplamiento pueden influir de manera negativa en la frecuencia de resonancia ( $f_0$ ) o en el factor de calidad ( $Q_0$ ) del resonador.
- Si incrementamos el número de puertos  $p$  y el número de orden de la red  $n$ , también, entonces aumenta rápidamente el número de posibles acoplamientos (máximo =  $p \cdot n$ ). Esta situación es inmanejable salvo para órdenes y número de puertos muy bajos.

Por todos los inconvenientes mencionados anteriormente, las estructuras con topología de acoplamientos transversal no son deseables a la hora de implementar una red con múltiples puertos. Por lo tanto el objetivo será transformar las distintas topologías transversales de redes en otras nuevas redes con topología y elementos circuitales diferentes (aunque compuestas igualmente por resonadores acoplados), pero con idéntico comportamiento eléctrico. Es en este punto donde entran en juego las transformaciones de semejanza, tales como las rotaciones de Givens.

## 3.3 Redes semejantes

Dos redes (con modelos circuitales descritos mediante matrices denotadas con prima, para las redes semejantes y sin prima para las matrices originales), serán semejantes si satisfacen las dos propiedades siguientes:



1. Están formadas por los mismos elementos circuitales, que para el caso estudiado a lo largo de este proyecto, serán resonadores tipo paralelo acoplados entre sí, de modo que puedan diferir únicamente en las frecuencias de resonancia de sus resonadores y en sus acoplamientos, tanto en topología como en valor. Por lo tanto, las restricciones del modelo circuital serán las siguientes:

- Las capacidades de los resonadores deberán ser unitarias, es decir:

$$C' = C \quad (3.63)$$

Si utilizamos la definición por bloques de estas matrices la ecuación (3.63) será equivalente a las siguientes igualdades:

$$C'_p = C_p = 0 \quad (3.64)$$

$$C'_n = C_n = U_n \quad (3.65)$$

- Las condiciones de carga de la red son iguales, por lo que la matriz de conductancia de puertos será la misma para ambas redes, en el caso de impedancias de referencia unitarias, es decir:

$$G'_p = G_p = U_p \quad (3.66)$$

Por otro lado, las conductancias de pérdidas de los resonadores no dependen de los acoplamientos de la red, sino que únicamente del factor de calidad intrínseco de los resonadores y del ancho de banda (tal y como se pudo observar en (3.7)). Por este motivo, la matriz de conductancias de los resonadores, también se conservará, resultando en la siguiente ecuación:

$$G'_n = G_n \quad (3.67)$$

Podemos concluir, por tanto, que las matrices de conductancias de redes semejantes serán iguales:

$$G' = G \quad (3.68)$$

Dado que la matriz de capacidades y la de conductancias son iguales, cualquier posible diferencia entre redes semejantes estará restringida a la matriz de acoplamientos  $M$ .

2. La segunda propiedad específica que para que dos redes sean consideradas como semejantes, entonces deberán tener la misma respuesta en frecuencia. Esto implica que el bloque de las primeras  $p$  filas y columnas de la inversa de la matriz de admitancias será igual, esto es:

$$(A_p^{-1})' = A_p^{-1} \quad (3.69)$$

Dado que esta segunda condición supone la invariabilidad de la matriz  $B_p$ , siendo esta matriz la inversa de la matriz de admitancias, es decir:

$$B_p = A_p^{-1} \quad (3.70)$$

De acuerdo con la condición impuesta por (3.69), la inversa de dicha matriz es la siguiente para dos redes semejantes:

$$B_p^{-1} = A_p - A_{pn}A_n^{-1}A_{pn}^T = A'_p - A'_{pn}(A'_n)^{-1}(A_{pn}^T)^1 \quad (3.71)$$

Donde  $A_p \in \mathbb{C}^{p \times p}$ ,  $A_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $A_{pn} \in \mathbb{C}^{p \times n}$  son las submatrices resultantes de la partición de  $A$  análoga a como se hizo con la matriz de acoplamientos  $M$  en (2.109).

$$A = \begin{bmatrix} A_p & A_{pn} \\ A_{pn}^T & A_n \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

A su vez cada una de estas submatrices se corresponde con las siguientes expresiones:

$$A_p = G_p + jM_p \quad (3.73)$$

$$A_n = G_n + jM_n + sC_n = G_n + jM_n + sU_n \quad (3.74)$$

$$A_{pn} = jM_{pn} \quad (3.75)$$

De forma análoga a la descrita en la sección 3.2.5, es posible identificar los términos sin dependencia y los términos dependientes. Para el caso de los términos independientes, tendremos que se satisface la siguiente ecuación:

$$G_p + jM_p = G'_p + jM'_p \quad (3.76)$$

De donde, identificando las partes reales e imaginarias, se deriva la condición ya conocida de que conductancias de referencia deben ser iguales ( $G'_p = G_p$ ) por lo que se debe satisfacer, a su vez, la siguiente igualdad:

$$M'_p = M_p \quad (3.77)$$

Esto quiere decir que la subred de acoplamientos entre puertos es única para el caso de redes semejantes. De esto se deriva además que lo mismo ocurrirá para la submatriz de admitancias nodales de los puertos:

$$A'_p = A_p \quad (3.78)$$

Esta ecuación (3.78) indica la relación de semejanza entre la matriz de admitancias nodales correspondiente a los puertos de redes semejantes. Además, en este caso, la relación de semejanza será la matriz identidad.

Adicionalmente, como de acuerdo con la ecuación (3.71) los términos dependientes de la frecuencia también serán iguales, por lo que tendremos que la siguiente ecuación también se satisface:

$$A_{pn}A_n^{-1}A_{pn}^T = A'_{pn}(A'_n)^{-1}(A_{pn}^T)^1 \quad (3.79)$$

La inversa de la matriz  $A_n$  ( $A_n^{-1}$ ) se puede obtener directamente a partir de la ecuación (3.74), resultando en la siguiente igualdad:

$$A_n^{-1} = (G_n + jM_n + sU_n)^{-1} \quad (3.80)$$

La ecuación anterior es equivalente a esta otra:

$$A_n = \frac{1}{\det(G_n + jM_n + sU_n)} \tilde{A}(s) \quad (3.81)$$

Donde la matriz  $\tilde{A}(s)$  es una matriz cuyos elementos son polinomios en  $s$ . Por este motivo, los polos de los términos de la ecuación (3.79) son los autovalores de la matriz  $-(G_n + jM_n)$  o lo que es lo mismo, también serán los autovalores de la matriz  $-(G'_n + jM'_n)$ .

Por lo tanto se puede concluir que existirá una relación de semejanza entre ambas matrices y por este motivo se obtendrá una nueva igualdad:

$$G'_n + jM'_n = T_n(G_n + jM_n)T_n^{-1} \quad (3.82)$$

Donde aparece definida una nueva matriz:  $T_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y que será unitaria, por lo que cumplirá la condición  $T_n = T_n^{-1}$ .

Por otro lado, como las matrices  $G_n$ ,  $G'_n$ ,  $M_n$  y  $M'_n$  son simétricas, los coeficientes de  $T_n$  serán reales.

Despejando de la ecuación (3.82) se puede observar como existe una relación de semejanza entre las matrices de conductancias y de acoplamientos, tal y como ilustran las siguientes igualdades:

$$G'_n = T_n G_n T_n^{-1} \quad (3.83)$$

$$M'_n = T_n M_n T_n^{-1} \quad (3.84)$$

Dado que también se cumple *que*  $U = T_n U_n T_n^{-1}$ , las mismas transformaciones de semejanza se cumplirán para  $A_n^{-1}$  y  $(A'_n)^{-1}$  así como para  $A_n$  y  $A'_n$ , es decir, las siguientes ecuaciones serán válidas:

$$(A_n)^{-1} = T_n A_n^{-1} T_n^{-1} \quad (3.85)$$

$$A_n^{-1} = T_n A_n T_n^{-1} \quad (3.86)$$

Esta ecuación (3.86) indica la relación de semejanza entre la matriz de admitancias nodales correspondiente a los resonadores de redes semejantes.

Despejando de (3.79) obtendremos la siguiente igualdad:

$$A'_{pn} = A_{pn} T_n^{-1} \quad (3.87)$$

Las ecuaciones (3.78), (3.86) y (3.87) asegurarán que también existirá una relación de semejanza entre las matrices completas de admitancias nodales  $A$  y  $A'$ , ya que de acuerdo con (3.72) éstas matrices están formadas por bloques de las anteriores y éstas ya eran semejantes.

Si se define una matriz  $T \in \mathbb{R}^{(p+n) \times (p+n)}$ , diagonal por bloques con el aspecto mostrado en la siguiente ecuación:

$$T = \begin{bmatrix} U_p & \\ & T_n \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Cabe destacar el hecho de que esta nueva matriz será unitaria ya que satisface la condición ( $T^{-1} = T^T$ ).

Concluyendo, podemos ver que esta será la matriz de paso de la relación de semejanza entre  $A$  y  $A'$ , ya que se cumplirá la siguiente igualdad:

$$A' = TAT^{-1} \quad (3.89)$$

Por otro lado, la ecuación correspondiente a las admitancias modales (3.3) implica que se podrá extender la relación de semejanza a las matrices de capacidades, conductancias y acoplamientos, obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$C' = TCT^{-1} \quad (3.90)$$

$$G' = TGT^{-1} \quad (3.91)$$

$$M' = TMT^{-1} \quad (3.92)$$

De acuerdo con todos los resultados obtenidos se puede concluir que las matrices utilizadas para definir modelos circuitales de dos redes semejantes serán semejantes entre sí. Por lo tanto, sólo será necesario asegurar las condiciones de semejanza entre las matrices de acoplamientos  $M$  y  $M'$ .

Finalmente se puede concluir que el método para obtener una red semejante a partir de otra dada se reducirá a encontrar una matriz de paso (diagonal por bloques como en (3.88)). La respuesta de la red semejante será igual a la original, por lo que, salvo para casos de orden muy reducido, será posible obtener infinitas redes con una respuesta determinada, sin más que modificar la matriz de paso.

## 3.4 Transformaciones de semejanza

Sean las matrices de semejanza  $T_{(i)}$  y  $T_{(j)}$ <sup>1</sup>. Entonces se puede demostrar fácilmente que la matriz producto  $T_{(i)}T_{(j)}$  será también una matriz de semejanza, y por lo tanto, tendrá las mismas propiedades (así mismo tendrá la misma restricción que la descrita en la ecuación (3.88)). Adicionalmente, esta transformación será equivalente a la aplicación sucesiva de las dos transformaciones parciales:

$$(T_{(j)}T_{(i)})A(T_{(i)}T_{(j)})^{-1} = T_{(j)}(T_{(i)}AT_{(i)}^{-1})^{-1} \quad (3.93)$$

Esta operación puede repetirse para cualquier número de transformaciones de semejanza parciales. Es decir, si  $\{T_{(i)}\}_{i \in \{1, \dots, r\}}$  es un conjunto de transformaciones de

---

<sup>1</sup> La notación de los subíndices entre paréntesis se utilizará para indicar elementos de un conjunto numerados. La notación de subíndices sin paréntesis se utiliza para identificar las distintas submatrices que componen una matriz.

semejanza, entonces, el producto de sus términos será equivalente la transformación  $T$  resultante de la aplicación sucesiva de todas ella, esto es:

$$T = \prod_{i=1}^l T_{(i)} \quad (3.94)$$

$$TAT^{-1} = \prod_{i=1}^l T_{(i)} A \prod_{i=1}^l (T_{(i)})^{-1} \quad (3.95)$$

De acuerdo con la definición de las transformaciones de semejanza, el producto de matrices parciales se efectuará de derecha a izquierda.

### 3.4.1 Rotaciones de Givens

Las rotaciones son un caso particular de transformaciones de semejanza y tienen como objetivo cancelar o modificar determinados parámetros de la matriz de acoplamientos manteniendo la respuesta de la red invariante.

Los vectores que sufren la transformación son rotados un ángulo en torno a un eje, lo que es equivalente a un cambio de coordenadas respecto al plano de referencia. Por este motivo, las rotaciones de Givens quedarán determinadas por los dos índices  $(k, l)$  correspondientes a los elementos de la base que define el plano, y por el ángulo de rotación, que se denotará como  $\theta$ .

La transformación de la matriz de acoplamientos original (denotada por  $M_o \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ ) en otra nueva matriz de acoplamientos (denominada  $M_r \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$ ) vendrá determinada por la siguiente ecuación, correspondiente con una transformación de semejanza como las estudiadas en la sección anterior:

$$M_r = G_{kl}(\theta) \cdot M_o \cdot G_{kl}^T(\theta) \quad (3.96)$$

Donde  $G_{kl}(\theta)$  es la matriz de rotación (también conocida como matriz de Givens), por lo que se corresponderá con la matriz de paso definida en (3.88), tal que  $G_{kl}(\theta) \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$  y unitaria. La forma de la matriz de Givens es la presentada a continuación:

$$G_{kl}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \cos(\theta_r) & \dots & -\sin(\theta_r) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \sin(\theta_r) & \dots & \cos(\theta_r) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \quad (3.97)$$

Dado que esta matriz es unitaria, la similitud entre la matriz de Givens y la matriz identidad supone que una rotación de este tipo aplicada a una matriz solamente modificará una pequeña parte de sus coeficientes. De este modo, la transformación de semejanza quedará definida de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$A' = G_{kl}(\theta) \cdot A \cdot G_{kl}^{-1}(\theta) \quad (3.98)$$

Dado que  $A$  y  $A'$  son simétricas, sólo los coeficientes de  $A'$  contenidos en las filas y columnas con índices  $k$  y  $l$  sufrirán algún cambio respecto a los coeficientes de  $A$ . Los valores de los coeficientes modificados son los correspondientes a las siguientes ecuaciones:

$$[A']_{mk} = \cos(\theta)[A]_{mk} - \sin(\theta)[A]_{ml} \quad (3.99)$$

$$[A']_{ml} = \sin(\theta)[A]_{mk} + \cos(\theta)[A]_{ml} \quad (3.100)$$

$$[A']_{kk} = \cos^2(\theta)[A]_{kk} + \sin^2(\theta)[A]_{ll} - 2\sin(\theta)\cos(\theta)[A]_{kl} \quad (3.101)$$

$$[A']_{ll} = \sin^2(\theta)[A]_{kk} + \cos^2(\theta)[A]_{ll} + 2\sin(\theta)\cos(\theta)[A]_{kl} \quad (3.102)$$

$$[A']_{kl} = (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))[A]_{kl} + \sin(\theta)\cos(\theta)([A]_{kl} - [A]_{ll}) \quad (3.103)$$

La notación utilizada para este tipo de transformaciones es la siguiente

- Al par  $(k, l)$  se le denomina coordenada de pivotado.
- Al coeficiente correspondiente de la matriz  $[M]_{kl}$  se le denomina pivote.

De acuerdo con la ecuación correspondiente a la matriz de transformación (3.88), ésta tendrá las  $p$  primeras filas y columnas correspondientes a la matriz de identidad. Para el caso que nos ocupa  $G_{kl}(\theta) \in \mathbb{R}^{(p+n) \times (p+n)}$  esto será equivalente a seleccionar los coeficientes  $k$  y  $l$  de modo que el pivote sea un elemento de  $M_n$ . Por este motivo, las rotaciones válidas serán todas las posibles sobre la matriz  $M_n$ . Sin embargo, esta transformación afectará también a los acoplamientos de entrada de la red, contenidos en  $M_{pn}$ , pero no a los acoplamientos entre puertos ( $M_p$ ).

De acuerdo con las propiedades de las transformaciones de semejanza estudiadas en la sección anterior se puede concluir que la ecuación (3.96) cumple además otras propiedades como que los valores propios o autovalores de la matriz resultante de la transformación serán exactamente los mismos que los de la matriz original. Como además si una matriz  $M_1$  transformada mediante esta ecuación (3.96) es semejante a  $M_2$  y  $M_2$  es semejante a  $M_3$ , entonces se puede concluir que  $M_1$  será semejante a  $M_3$ . Esta misma operación podrá repetirse durante secuencias arbitrariamente largas y ángulos de rotación arbitrariamente definidos tomando como punto de partida la matriz de acoplamientos original ( $M_0$ ), obteniendo la siguiente igualdad:

$$M_r = G_{kl}(\theta) \cdot M_{r-1} \cdot G_{kl}(\theta) \quad \text{con } r = \{1, \dots, N\} \quad (3.104)$$

Para la iteración  $r$  la respuesta de  $M_r$  es idéntica a la de  $M_o$ . Podemos concluir por tanto que el conjunto completo de matrices de transformaciones puede reducirse a una sola de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$M_R = \prod_{r=R}^1 G_{kl}(\theta) \cdot M_o \cdot \prod_{r=1}^R G_{kl}(\theta)^t = G_{kl_T}(\theta) \cdot M_o \cdot G_{kl_T}^t(\theta) \quad (3.105)$$

$$G_{kl_T}(\theta) = \prod_{r=R}^1 G_{kl}(\theta) \quad (3.106)$$

Finalmente se puede concluir que las ventajas de las rotaciones de Givens son las siguientes:

- Las ecuaciones (3.99) a (3.103) permiten calcular la rotación necesaria para que un coeficiente de acoplamiento tome un valor determinado o se anule.
- Aunque la posición de pivotado esté restringida a las filas y columnas de  $M_n$ , el acoplamiento cuyo valor se quiere modificar puede estar localizado en  $M_{pn}$ .
- La transformación elemental solamente afectará a un máximo de dos filas y columnas de la matriz, lo que permitirá minimizar la generación de nuevos coeficientes de acoplamientos no nulos. Esto quiere decir que si dos elementos los cuales están enfrentados a través de las filas y columnas del pivote son ambos nulos antes de aplicar la transformación de semejanza de rotación, entonces seguirán siendo nulos tras ella, es decir, si por ejemplo los elementos  $M_{13}$  y  $M_{15}$  son nulos antes de la transformación del pivote [3,5] seguirán teniendo valor nulo tras dicha transformación a pesar de encontrarse en la zona donde serían afectadas por la transformación (filas y columnas  $i$  y  $j$ ).

Como se ha mencionado anteriormente, el uso de las rotaciones de Givens para el caso aquí estudiado tendrá como objetivo la obtención de nuevas matrices de acoplamiento las cuales anulen, o al menos minimicen, determinados coeficientes de acoplo manteniendo la respuesta de la red invariante. Para ello se seleccionarán los pivotes de manera aleatoria, de entre los posibles y se procederá a buscar aquellos ángulos de rotación que, aplicados a la matriz de acoplamientos original, generen una nueva matriz semejante a la anterior en la que la suma absoluta de los coeficientes que se desean anular sea lo menor posible.

### 3.4.1.1 Ejemplo de rotaciones de Givens

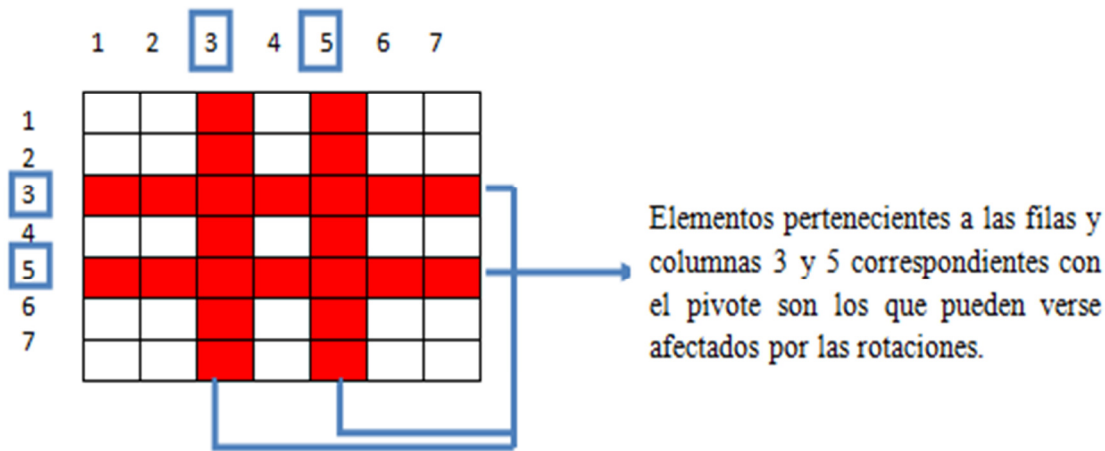
A modo de ejemplo, a continuación se ilustra una matriz de rotación  $G_{kl}(\theta)$  para el caso  $(n+p) = 7$  ( $G_{kl}(\theta) \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ ) y usando como pivote el elemento [3,5]. La forma de la matriz de rotación de Givens ( $G_{kl}(\theta)$ ) es la siguiente:

$$G_{kl}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_r) & 0 & -\sin(\theta_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\theta_r) & 0 & \cos(\theta_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Para obtener la matriz semejante no sería necesario más que aplicar la ecuación (3.96) que para el caso particular de la transformación de pivote [3,5] quedaría como sigue:

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_r) & 0 & -\sin(\theta_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\theta_r) & 0 & \cos(\theta_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M_o \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_r) & 0 & \sin(\theta_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\theta_r) & 0 & \cos(\theta_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Para el caso del ejemplo que nos ocupa (usando el pivote [3, 5] y para una matriz  $M \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ ) los elementos que se pueden ver afectados por las rotaciones se encontrarán a lo largo de las filas y columnas 3 y 5, tal y como puede apreciarse en la siguiente figura (coloreadas en rojo las filas y columnas afectadas por la transformación):



Los elementos de la matriz de acoplamiento que no se encuentren en la zona coloreada de rojo, y que serán por tanto aquellos que no pertenezcan a ninguno de los dos elementos del pivote usado en este ejemplo para realizar la transformación ([3,5]), no resultarán afectados por el proceso de las rotaciones de Givens. El resto de elementos, es decir, aquellos que se encuentren en la zona coloreada serán los que se modificarán. Para ello el proceso de las rotaciones se basará en la obtención sucesiva de un ángulo de rotación capaz de reducir sucesivamente los coeficientes que se desearan anular. El proceso finalizará cuando dichos coeficientes sean nulos o cuando, tras un cierto número de iteraciones el resultado final no mejore los obtenido previamente (este último criterio se empleará para evitar caer en bucles infinitos en caso de que la solución ideal no se llegase a encontrar nunca).



## 3.5 Grafos planos

Los grafos planos son una buena representación de topologías, ya que si una matriz de acoplamientos no puede ser dibujada mediante un grafo plano, entonces se puede asegurar que no será realizable. Sin embargo, esta será una condición necesaria pero no suficiente.

En teoría de grafos, un grafo plano es aquel que puede ser dibujado en el plano sin que ninguna arista se interseque (una definición más formal enuncia que un grafo plano es aquel que puede ser embebido en un plano). [15 y 16]

Relacionando las aristas con los acoplamientos de las topologías, podemos ver la similitud entre ambos conceptos, por lo que esta propiedad deberá satisfacerse cuando se deseen implementar topologías realizables.

Los grafos  $K_5$  y el  $K_{3,3}$  son los grafos no planos de menor número de vértices y serán los que permitan caracterizar el resto de los grafos no planos.

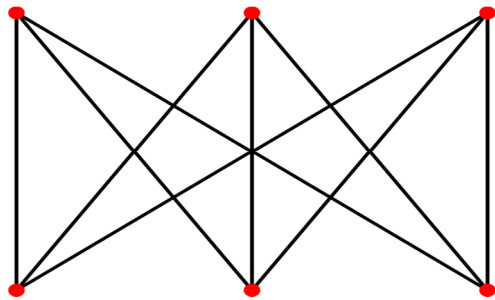


Figura 26: Grafo no plano  $K_{3,3}$

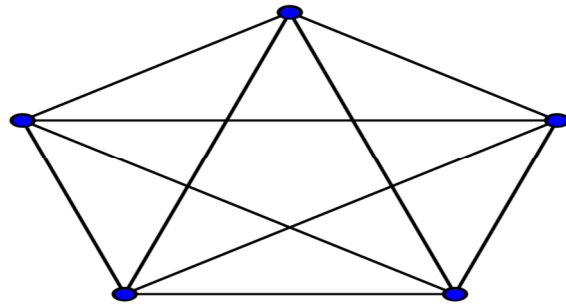


Figura 27: Grafo no plano  $K_5$

### 3.5.1 Teorema de Kuratowski

De acuerdo con este teorema un grafo es plano si y sólo si no contiene un subgrafo que sea una subdivisión elemental de los grafos no planos  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .

Una subdivisión elemental de un grafo resulta de insertar vértices en las aristas (por ejemplo cambiado  $\bullet \text{---} \bullet$  por  $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$ ).

Otro ejemplo de un grafo no plano es el grafo de Petersen, ya que contiene en su interior un grafo homeomorfo a  $K_{3,3}$  tal y como puede apreciarse en la siguiente figura:

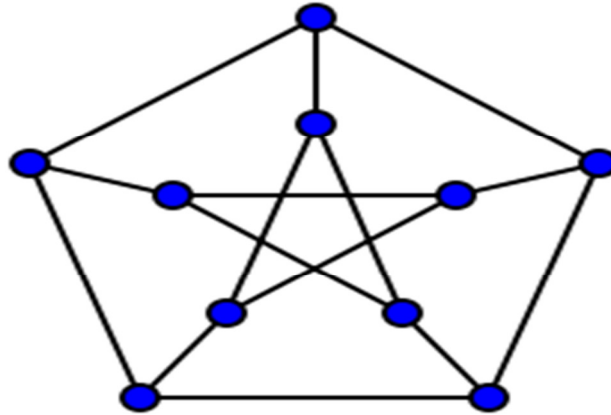


Figura 28: Grafo de Petersen (no plano)

Sin embargo, este teorema no es práctico si lo que se desea es decidir rápidamente si un grafo es plano o no. Por este motivo existe un algoritmo más veloz que es capaz, dado un grafo de  $n$  vértices (en el caso estudiado en este documento estos nodos se corresponderán con puertos y resonadores) y  $e$  número de aristas (en nuestro caso estas aristas se corresponderán con todos los acoplamientos, tanto entre resonadores, puertos o entre puertos-resonadores), determinar en un tiempo de ejecución lineal ( $O(n)$ ) si el grafo es plano o no. Para ello utiliza los dos teoremas siguientes, demostrados por Euler:

- Teorema 1: Si  $n \geq 3$  entonces:

$$e \leq 3n - 6 \quad (3.109)$$

- Teorema 2: Si  $n > 3$  y no existen ciclos de longitud 3, entonces:

$$e \leq 2n - 4 \quad (3.110)$$

Mediante estos teoremas se demuestra porque el grafo  $K_{3,3}$  no es plano, ya que tiene 6 vértices, 9 aristas y ningún ciclo de longitud 3, por lo que de acuerdo con el teorema 2 no puede ser plano.

No obstante, estos teoremas están contruidos mediante una implicación unidireccional (si), y no bicondicional (si y solo si) y por tanto, solamente pueden ser usados para probar que los grafos no son planos, pero no que sí que sean planos, por lo que si ambos teoremas fallan deberá recurrirse a otros métodos para demostrar si el grafo es plano o no.

Relacionando estos conceptos con las topologías cabe destacar el hecho de que no sólo el grafo resultante ha de ser plano, sino que además debe haber determinados vértices (los puertos) del grafo que deberán encontrarse situados en el exterior de éste. Una solución para satisfacer esta propiedad sería la introducción de aristas auxiliares virtuales para el cómputo de los teoremas anteriores y de esta manera determinar si se podrá obtener o no un grafo plano una vez proporcionado el número de nodos (puertos y resonadores) y acoplamientos.

## 3.6 Representación de matrices de acoplamiento

Como se ha mencionado con anterioridad, las matrices de acoplamiento representan todos los acoplamientos entre todos los elementos de la red. Sin embargo, utilizando esta matriz no es fácil observar los posibles cruces entre acoplamientos que se puedan producir. Por este motivo se emplean los diagramas de nodos y acoplamientos correspondientes con las topologías.

La topología es un diagrama donde aparecen representados todos los nodos (puertos y resonadores) y acoplamientos de la red, así como sus acoplamientos. La matriz de topología<sup>2</sup> no es más que una representación binaria de la matriz de acoplamientos, en la que los acoplamientos se indicarán mediante unos (sin importar el coeficiente de acoplamiento) y la ausencia de éstos mediante ceros.

A lo largo de esta sección se detallará el método diseñado para la generación automática de diagramas de nodos y acoplamientos a partir de una matriz de acoplamientos dada (o de una matriz de topología), para lo cual se verá, en primer lugar, algunas de las propiedades que deben cumplir las topologías.

Una condición necesaria para que una red puede ser construida físicamente es que no existan cruces entre cualquiera de sus acoplamientos, es decir, entre las uniones internas entre los resonadores, entre las uniones internas de los puertos o entre las uniones puertos-resonadores. Esto quiere decir, que es condición necesaria, aunque no suficiente que la red pueda ser representada mediante grafos planos.

Adicionalmente los puertos deberán encontrarse situados en los extremos de la red para posteriormente poder conectar dicha red a otros elementos externos. Esto implicará que un diagrama que permitiese conectar todos los puertos y resonadores presentes en la matriz de acoplamientos sin ningún cruce entre los acoplamientos, pero en el que los puertos se encontrasen aislados en el interior de la red, no sería, en principio, una red válida en sentido físico.

Un ejemplo de red que cumpla con las propiedades de acoplamientos pero con los puertos interiormente aislados de forma que la red final no sea físicamente realizable es la siguiente:

---

<sup>2</sup> Para referirnos a la matriz de topología se utilizará la notación  $M_{\text{topo}}$

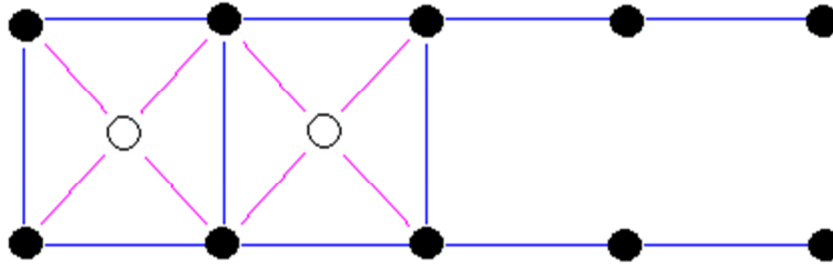


Figura 29: Topología de red no implementable físicamente

Donde los círculos negros rellenos se corresponden con los resonadores, los círculos blancos con los puertos, las líneas azules se corresponden con los acoplamientos internos entre resonadores, las moradas muestran los acoplamientos entre puertos y resonadores y las líneas negras (que en este caso no aparecen), mostrarían los acoplamientos internos entre puertos, es decir, la notación empleada es la siguiente:

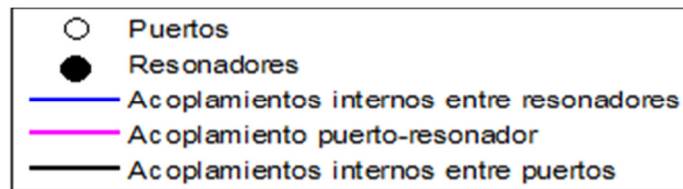


Figura 30: Notación empleada para la representación de topologías

Para tener una idea clara de los diagramas de nodos y acoplamientos se ha desarrollado una función que capaz de dibujar la topología de forma automática. Esta función necesitará como parámetro de entrada la matriz de acoplamientos y a partir de ella realizará una distribución física de los nodos, así como las conexiones entre los distintos elementos. Esta función, a su vez, empleará dos algoritmos diferentes, dependiendo de si lo que se desea es dibujar redes con topologías transversales o no, si bien la primera parte de esta función correspondiente con la identificación de las submatrices de la topología será común para ambas.

Este método, en primer lugar, procederá a la identificación de cada una de las submatrices que componen la matriz de acoplamientos (o su equivalente, la topología). Como se estudió en la ecuación (2.109) la matriz de acoplamientos completa está formada por la matriz de acoplamientos internos (entre pares de resonadores ( $M_n$ )), la matriz de acoplamientos directos entre pares de puertos ( $M_p$ ) y entre acoplamientos entre puertos y resonadores ( $M_{pn}$ ).

Analizando cada submatriz de manera independiente podemos observar que se cumplen ciertas propiedades que simplificarán la identificación de cada una de ellas.

La matriz de acoplamientos directos entre pares de puertos  $M_p$  es recíproca y simétrica, además no existirá auto-acoplamiento entre puertos, con lo que los elementos de la diagonal serán nulos. Dicho esto bastará con analizar la parte triangular superior (o inferior) de esta matriz para tener caracterizado su comportamiento por completo.

La matriz de acoplamientos internos entre pares de resonadores ( $M_n$ ) también será recíproca y simétrica, y además siempre existirán auto-acoplamientos entre resonadores, lo que implica, que al igual que en el caso anterior, bastará con analizar la submatriz triangular superior (o inferior) para tener la red caracterizada por completo.

En cuanto a la matriz de acoplamientos entre puertos y resonadores ( $M_{pn}$ ) esta no será ni simétrica ni recíproca, puesto que ni siquiera es cuadrada, lo que implica que se deberá analizar por completo. Sin embargo, esta matriz aparece dos veces en la partición por bloques de la matriz de acoplamientos completa (2.109), una de ellas traspuesta, con lo que bastará en análisis de una de las dos.

Como hemos mencionado anteriormente gracias a la subdivisión de la matriz de acoplamientos completa en submatrices, la representación total de la red será más sencilla, ya que esta podrá ser llevada a cabo por partes y dependiendo de la disposición de los elementos de cada una de las submatrices se procederá a un reordenamiento diferente de puertos y resonadores con el objetivo final de construir una red físicamente realizable y con la forma más estructurada posible.

Es importante destacar el hecho de que antes de empezar con la representación, se analizará la matriz  $M_n$  para emplear el algoritmo de representación de redes transversales (en el caso de que  $M_n$  sea diagonal) u otro algoritmo de representación de diagrama de nodos y acoplamientos correspondiente con la topología especificada.

### 3.6.1 Representación de redes transversales

Las redes transversales son aquellas en las que todos sus puertos están conectados con todos los resonadores. Esto implicará que las redes no serán realizables (salvo para algún caso trivial) ya que existirán múltiples cruces entre sus acoplamientos.

El algoritmo empleado para dibujar redes transversales es el siguiente:

1. En primer lugar, se asignará a cada resonador un índice numerado de acuerdo con la posición ocupada a lo largo de la diagonal de  $M_n$  y se procederá a colocar todos los resonadores a lo largo de una fila vertical siendo el de mayor índice de numeración el que aparezca en la posición superior.
2. Adicionalmente, se asignará a cada puerto un índice numerado de acuerdo con la posición ocupada a lo largo de la diagonal de  $M_p$  y se procederá a distribuir los puertos a ambos lados de la fila de resonadores, colocando a la izquierda de ésta los puertos con numeración impar y a su derecha aquellos con numeración par. Si hubiese más de un puerto a cada lado de la fila de resonadores se procederá a crear sendas filas verticales de puertos en cada uno de los lados siguiendo el mismo criterio que el empleado a la hora de distribuir los resonadores.

3. El tercer y último paso corresponde al dibujo de los acoplamientos entre puertos y resonadores (representados en la matriz  $M_{pn}$ ). La matriz de resonadores  $M_n$  de redes transversales es diagonal, por lo que no existirán acoplamientos entre resonadores. Además, en general, todos los coeficientes de acoplo de la matriz de puertos  $M_p$  tomarán el valor cero, por lo que tampoco existirán acoplamientos entre puertos. Por lo tanto, todos los acoplamientos de la red serán los debidos a los acoplamientos entre puertos y resonadores.

Para ilustrar de manera más clara el funcionamiento de este programa, a continuación se ilustrará un ejemplo de la representación de una red transversal.

Las topologías transversales son aquellas obtenidas directamente de la síntesis analítica de redes.

Para el caso de una red sencilla de 3 puertos y 2 canales de orden 3 cada uno (lo que hacen un total de 6 resonadores), la matriz de acoplamientos obtenida mediante un proceso de síntesis analítica es la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2498 & -0.5658 & 0.2348 & 0.4431 & 0.1838 & 0.0650; \\ 0 & 0 & 0 & 0.0650 & 0.1838 & 0.4431 & 0.2348 & -0.5658 & 0.2498; \\ 0 & 0 & 0 & 0.3937 & 0.6333 & 0.0469 & 0.0469 & 0.6333 & 0.3937; \\ 0.2498 & 0.0650 & 0.3937 & -1.2445 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; \\ -0.5658 & 0.1838 & 0.6333 & 0 & -0.7892 & 0 & 0 & 0 & 0; \\ 0.2348 & 0.4431 & 0.0469 & 0 & 0 & -0.1197 & 0 & 0 & 0; \\ 0.4431 & 0.2348 & 0.0469 & 0 & 0 & 0 & 0.1197 & 0 & 0; \\ 0.1838 & -0.5658 & 0.6333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7892 & 0; \\ 0.0650 & 0.2498 & 0.3937 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2445 \end{bmatrix}; \quad (3.111)$$

La matriz de topología es igual que la matriz de acoplamientos con la salvedad de que no importarán los valores de los acoplamientos (estos aparecerán representados mediante el elemento “X” para indicar acoplamiento y “0” para indicar su ausencia):

$$M_{\text{topo}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & X; \\ 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & X; \\ 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & X; \\ X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; \\ X & X & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0; \\ X & X & X & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0; \\ X & X & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0; \\ X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0; \\ X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}; \quad (3.112)$$

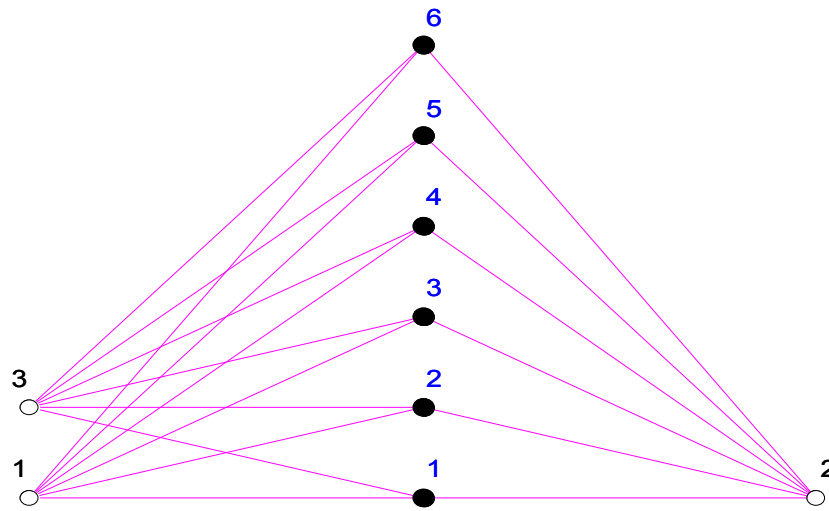
Como se puede observar esta matriz está formada por las cuatro submatrices de la ecuación (2.109). Identificando cada una de ellas se obtendrá lo siguiente:

$$M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{Matriz de acoplamiento internos entre puertos} \quad (3.113)$$

$$M_{pn} = \begin{bmatrix} X & X & X & X & X & X; \\ X & X & X & X & X & X; \\ X & X & X & X & X & X \end{bmatrix}; \quad \text{Matriz de acoplamientos puerto-resonador} \quad (3.114)$$

$$M_n = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0; \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0; \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}; \quad \text{Matriz de acoplamientos internos entre resonadores} \quad (3.115)$$

El diagrama de nodos y acoplamientos correspondiente con esta matriz de topología y generado de manera automática por la función aquí desarrollada produce como resultado la siguiente salida:



**Figura 31: Diagrama de nodos y acoplamientos de una red transversal con 2 canales de orden 3**

Dado que estamos trabajando con una red transversal no trivial, no existirá ninguna reordenación o distribución de los nodos que produzca como resultado una red físicamente realizable. Para este tipo de problemas deberá recurrirse a la síntesis por optimización (tal y como se estudiará más en profundidad en la sección 4.3), que es capaz de obtener redes realizables físicamente, modificando la topología, y que además cumplan con las especificaciones, aunque con el inconveniente de una distorsión en la repuesta final.

### 3.6.2 Representación de redes no transversales

Como se ha estudiado en la sección anterior las redes transversales no podrán ser realizadas físicamente. Sin embargo existe la posibilidad de realizar un proceso de síntesis especificando la topología de acoplamientos deseada. Es por este motivo que el método implementado para la representación de matrices de acoplamiento (o topologías) será también capaz de realizar diagramas de nodos y acoplamientos de redes no transversales.

El algoritmo utilizado por este método para la representación de redes no transversales es el siguiente:

1. En primer lugar se asignará a cada resonador un índice numerado de acuerdo con la posición ocupada a lo largo de la diagonal de  $M_n$ .
2. En segundo lugar se procederá a distribuir los resonadores en tantas filas horizontales como canales existiesen en las especificaciones (si no se especificase nada, el número de canales se puede calcular como el número de puertos menos uno). Los resonadores se ordenarán comenzando con el resonador de menor numeración por la izquierda de la fila a lo largo de la cual están distribuidos los resonadores. Si existen varios canales la distribución de los resonadores será similar a la de una rejilla.
3. A continuación se procederá a representar los acoplamientos entre resonadores, es decir, los elementos no nulos de la matriz  $M_n$  (excluyendo los elementos de la diagonal que indican autoacoplamientos y que no hará falta que sean representados). Si dos resonadores, digamos  $i, j$  están situados juntos se procederá a unirlos mediante una línea azul representando de esta forma el acoplamiento  $M_{nij} = M_{nji}$ . Si por el contrario, entre los dos resonadores que se desean unir mediante un acoplamiento hay otro resonador entre medias, de forma que la unión mediante una línea recta implicaría el paso por este resonador intermedio, se procederá a la unión mediante un semicírculo achatado con el que se evitará el cruce con otros resonadores interiores a la red. Puede darse el caso, sin embargo, que este semicírculo se interseque con otro ya representado anteriormente, con lo que la red no podría ser realizable físicamente. Es por este motivo que si en un mismo canal hay que conectar dos resonadores mediante un semicírculo, digamos superior, el siguiente semicírculo de este mismo canal será inferior y viceversa. Esto, aunque ayuda a evitar posibles acoplamientos, no soluciona el problema totalmente. Un procedimiento análogo pero con semicírculos izquierdo y derecho se usará para el caso en el que se desee conectar resonadores situados en una misma fila vertical.
4. Los puertos serán los últimos elementos que se colocarán, ya que deberán encontrarse en el exterior de la red. Se situarán junto a los resonadores con los que tengan acoplamiento directo si éstos se encuentran a lo largo del perímetro del diagrama de nodos y se conectarán directamente a ellos de acuerdo con la matriz  $M_{pn}$ . Primero se intentará una conexión directa mediante líneas rectas, y si esta no fuera posible se procederá con la unión mediante semicírculos de la misma manera que para el caso de los acoplamientos entre resonadores.

Para comprender de manera más clara el funcionamiento de este método, a continuación se ilustrará un ejemplo de representación de redes no transversales.



Sea la siguiente matriz de acoplamientos:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \\ X & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & X & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Procediendo de igual manera que en el caso anterior (3.112) e identificando cada una de las submatrices de las que está formada la matriz de acoplamientos, de acuerdo con (2.109), podemos observar como las submatrices toman los siguientes valores:

$$M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{Matriz de acoplamiento internos entre puertos} \quad (3.117)$$

$$M_{pn} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}; \quad \text{Matriz de acoplamientos puerto-resonador} \quad (3.118)$$

$$M_n = \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X \end{bmatrix}; \quad \text{Matriz de acoplamientos internos entre resonadores} \quad (3.119)$$

Después de aplicar la función que calcula el diagrama de nodos y acoplamientos de la red de manera automática tomando como parámetro de entrada la matriz de acoplamientos o la topología, lo que podemos observar es el siguiente resultado:

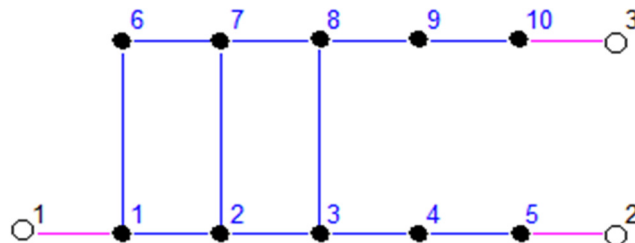
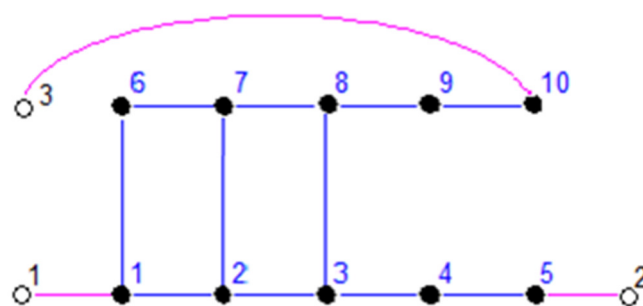


Figura 32: Representación de una red no transversal de 2 canales de orden 5

La distribución de los puertos y resonadores a lo largo del espacio físico es arbitraria, si bien el criterio elegido para la representación de topologías intenta obtener el

diagrama de nodos y acoplamientos más estructurado posible ya que esto será beneficioso para la posterior construcción física de la red.

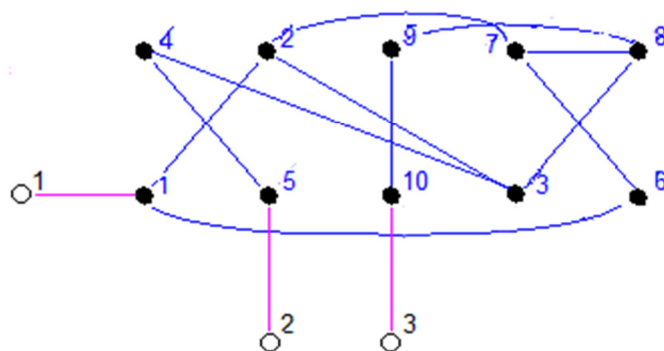
Esto quiere decir que una misma matriz de acoplamientos puede producir distintas topologías, dependiendo del criterio elegido para distribuir y unir todos los nodos de la red. Un ejemplo sencillo de este hecho es el ejemplo mostrado a continuación, en el puerto 3 se ha recolocado pasando ahora a estar alineado con el resonador número 6 (aunque su acoplamiento sigue siendo el mismo, es decir, sigue estando acoplado con el resonador 10).



**Figura 33: Representación alternativa de una red no transversal de 2 canales de orden 5**

Esta red es completamente equivalente a la anterior dónde lo único que se ha realizado ha sido una recolocación de la distribución física de uno de sus puertos, dejando el resto de elementos sin alterar. Nótese que esta operación puede repetirse para cada nodo (puerto o resonador), obteniendo redes igualmente válidas (aunque habría que considerar el caso de aquellas reordenaciones que diésen lugar a cruces entre acoplamientos, en cuyo caso la matriz ya no sería implementable físicamente).

En la siguiente figura se ilustra una red con la misma matriz de acoplamientos que las anteriores, pero donde se han aplicado varias reordenaciones en las distribuciones físicas de los puertos y resonadores, y donde se ha mantenido la numeración de todos los nodos para ayudar a la identificación de puertos y resonadores. El resultado, en este caso, es una topología irrealizable físicamente, pues aparecen múltiples cruces entre los acoplamientos.



**Figura 34: Representación alternativa no realizable de una red no transversal de 2 canales de orden 5**

Por lo tanto, se puede concluir que las múltiples posibles reordenaciones de los puertos y resonadores, en cuanto a la disposición espacial se refiere, pueden dar lugar a distintas topologías, y estas serán unas veces realizables físicamente y otras no, por lo que habrá que ser cuidadosos a la hora de elegir la distribución de los nodos y acoplamientos de la red.

Por otro lado, no existe ningún teorema capaz de determinar de forma exacta si una red será realizable físicamente a partir de su matriz de acoplamientos o no por lo que cabría pensar en la posibilidad de que el algoritmo de cálculo de la topología se quedase bloqueado intentando conseguir la reordenación correcta en los casos en los que ésta no existiese. Sin embargo, el método aquí propuesto realizará las comprobaciones y reordenaciones principales, tras las cuales, realizará el diseño de la red, independientemente de si ésta es realizable o no.

## 3.7 Conclusiones

A lo largo de este capítulo se ha estudiado el método analítico de síntesis que permite obtener matrices de acoplamientos. Sin embargo, éstas matrices serán transversales y por lo tanto no deseadas, ya que entre otros motivos, no serán realizables físicamente. De acuerdo con esto, se aplicarán las transformaciones de semejanza a estas matrices obteniendo otras semejantes con la misma respuesta pero con distinta topología.

Dado que una de las condiciones necesarias (aunque no suficiente) que debe cumplir una topología para ser realizable físicamente es que sea plana, también se han estudiado algunas de las propiedades características de este tipo de redes.

La forma de representar topologías es arbitraria, por lo que, en general, dependerá del método elegido para ello. En este capítulo se ha presentado un método que permite el la representación de cualquier tipo de red, intentando, en la medida de lo posible, que no aparezcan cruces entre acoplamientos, condición necesaria para que la red sea realizable físicamente. Sin embargo si esto no fuese posible, el método asignará igualmente una topología con el menor número de cruces entre acoplamientos posible.



# Capítulo 4

## Síntesis de multiplexores

### 4.1 Introducción

La idea principal de la síntesis es que dadas unas especificaciones, encontrar una matriz de acoplamientos que cumpla estos criterios.

Existen dos tipos de síntesis claramente diferenciados, la síntesis analítica (sección 4.2) y la síntesis por optimización (sección 4.3) (adicionalmente, estos dos métodos se podrán combinar buscando las ventajas de ambos para intentar obtener los mejores resultados (sección 4.4)):

1. Retomando la idea de síntesis analítica planteada en el capítulo anterior (sección 3.2), un problema de síntesis analítica consistirá en la obtención de una red eléctrica, tanto de su estructura como de los valores de sus componentes, cuyo comportamiento sea uno previamente especificado.

Las topologías resultantes de este tipo de síntesis serán transversales, y por lo tanto, no deseables, por lo que habrá que recurrir a las transformaciones de semejanza estudiadas en el capítulo anterior (sección 3.4) para transformar estas topologías no realizables en otras que sí que lo sean. Adicionalmente se podrá especificar la topología deseada, y mediante dichas transformaciones intentar alcanzarla, aunque esto no será siempre posible.

2. El segundo método es la síntesis por optimización (sección 4.3), fija la topología y trata de encontrar los coeficientes de la matriz de acoplamientos que den lugar a una respuesta lo más parecida a la ideal.

En este capítulo se estudiarán ambos procesos de síntesis mediante el uso de ejemplos prácticos (secciones 4.2 y 4.3) y posteriormente se explicará el nuevo método de síntesis conjunta en el que se unirán las ventajas de ambos métodos (4.4). Finalmente se terminará con unas conclusiones (sección 4.5).

## 4.2 Síntesis analítica

Como se ha mencionado en el capítulo anterior (sección 3.2) la síntesis analítica fija la respuesta objetivo y obtiene como resultado una matriz de acoplamientos y topología que produzcan como resultado esa respuesta. Este tipo de síntesis obtiene la respuesta objetivo, por lo que puede considerarse como ideal.

Se basa en operaciones algebraicas exactas y no en procedimientos iterativos ni operaciones numéricas.

Los datos de entrada serán los parámetros de admitancia en cortocircuito expresados como polinomios racionales.

Como las topologías resultantes de este tipo de síntesis serán transversales, y por lo tanto, no deseables, habrá que recurrir a las transformaciones de semejanza estudiadas en el capítulo anterior (sección 3.4) para transformar estas topologías no realizables en otras que sí que lo sean.

Adicionalmente se podrá especificar la topología deseada, y mediante las transformaciones de semejanza (como las rotaciones de Givens) intentar alcanzarla.

Usando a las rotaciones de Givens se podrá reducir el número de coeficientes no nulos de la matriz de acoplamientos sucesivamente de acuerdo a las ecuaciones vistas en la sección 3.4.1 hasta obtener una topología realizable. Sin embargo, dado que estas rotaciones son transformaciones de semejanza cuyo objetivo prioritario es el de no modificar la respuesta objetivo, habrá casos en los que el resultado de la aplicación de este tipo de transformaciones consiga reducir el valor de los coeficientes de  $M$  que se desean cancelar, pero no anularlos totalmente. Debido también a las propiedades de modificación de coeficientes ocasionadas por la posición de pivotado, la matriz de acoplamientos resultante tendrá un alto número de coeficientes no nulos si bien los que se deseaban anular al aplicar este tipo de rotación tendrán, en general, un valor menor que el resto. Por este motivo, estos coeficientes se podrán truncar directamente mediante umbrales o multiplicando escalarmente y elemento a elemento la matriz de acoplamientos por la matriz de topología (binaria). Sin embargo, estas operaciones no son de semejanza,

por lo que distorsionarán la respuesta en frecuencia final, si bien, la distorsión será, en general, pequeña, ya se eliminarán los acoplamientos con menor influencia.

El modo de escoger aquellos valores de acoplamientos como despreciables puede ser distinto en cada caso, por ejemplo se puede establecer un umbral bajo (0.01) y forzar a cero a todos los coeficientes menores que dicho umbral. Otra posibilidad es calcular el valor del coeficiente mayor de la matriz de acoplamientos completa y establecer como umbral un valor de un orden (o dos) menor, anulando, aquellos coeficientes con un valor de acoplamiento menor que este umbral.

Si lo que se desea es tener un número máximo de acoplamientos con el objetivo de obtener topologías realizables físicamente, se podrá optar por calcular el mencionado umbral como el menor de los  $n$  mayores acoplamientos, anulando el resto de coeficientes. Existen más opciones para encontrar los umbrales, por ejemplo, teniendo en cuenta el número de acoplamientos de la topología especificada inicialmente, o a partir de la síntesis por optimización, tal y como se detalla en la sección 4.3.

Sin embargo, la elección de umbrales puede ser diferente para cada problema, por lo que la mejor solución pasará por la multiplicación escalar y elemento a elemento de la matriz de topología especificada por la matriz de acoplamientos obtenida tras el proceso de rotaciones. Si no se hubiese especificado matriz de topología alguna como parámetro de entrada del proceso de síntesis, se calculará una de manera automática en función del número de canales y del orden de cada uno de éstos. No obstante, habrá casos en los que incluso estas matrices no puedan ser implementadas físicamente (generalmente para órdenes de redes grandes), si bien el número de cruces entre acoplamientos será mucho menor que para el caso de topologías transversales.

## 4.2.1 Ejemplos

Para ilustrar los conceptos teóricos previos, a continuación se ilustrarán una serie de ejemplos reales de síntesis. Así mismo, se compararán las respuestas en frecuencia y topologías obtenidas tras cada proceso (síntesis analítica, tras aplicar las rotaciones de Givens y tras truncar los coeficientes de acoplamiento no deseados).

### 4.2.1.1 Diplexor

Este primer ejemplo se corresponde con un multiplexor de dos canales y con las características especificadas en la siguiente tabla:

PARÁMETRO	CANAL 1	CANAL 2
Orden	4	4
Frecuencia central (GHz)	12.25	12.3
Ancho de banda (MHz)	20	20
Rizado de los canales (dB)	18	18
Posición de los ceros de transmisión (rad/s)	1.8j-1.8j	1.8j-1.8j

Tabla 2: Especificaciones del diplexor

Tras aplicar el proceso de síntesis analítica se obtendrá la siguiente matriz de acoplamientos:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0.0004 & 0.0003 & 0.0001 & 0.2032 & 0.3179 & 0.3182 & 0.1685 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1685 & -0.318 & 0.3179 & -0.2032 & -0.0001 & 0.0003 & -0.0004 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2140 & 0.3250 & 0.3118 & 0.1527 & 0.1527 & -0.3118 & 0.325 & -0.2140 \\ 0.0002 & 0.1685 & 0.2140 & -1.0716 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0004 & -0.3182 & 0.3250 & 0 & -0.922 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0003 & 0.3179 & 0.3118 & 0 & 0 & -0.5465 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & -0.2025 & 0.1527 & 0 & 0 & 0 & -0.3703 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2032 & -0.0001 & 0.1527 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3703 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3179 & 0.0003 & -0.3118 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5465 & 0 & 0 \\ 0.3182 & -0.0004 & 0.3250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9217 & 0 \\ 0.1685 & 0.0002 & -0.2140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0716 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La matriz de topología de esta matriz no es más que la representación binaria de la matriz anterior, es decir, asignado acoplamiento (“X”) cuando el coeficiente correspondiente no sea nulo y “0” en caso contrario. Como resultado obtendremos la siguiente matriz de topología:

$$M_{\text{topo}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Donde, de acuerdo con la representación por bloques de la ecuación (2.109), las líneas a trazos azules indicarán la separación entre las distintas submatrices.

Si representamos esta matriz con el método implementado en la sección 3.6, podemos apreciar el siguiente diagrama de nodos y acoplamientos (topología):

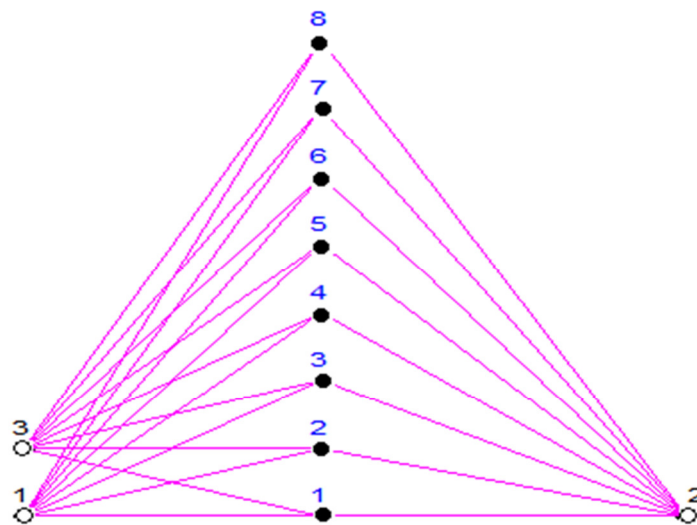


Figura 35: Topología transversal de un diplexor



Como se puede apreciar esta red tiene la topología transversal obtenida tras un proceso de síntesis analítica.

Aunque esta topología no es deseable (al ser transversal), es la que produce la respuesta objetivo. Esta respuesta se calcula directamente representando los parámetros  $S$  correspondientes a la matriz de acoplamientos de (4.1). Las relaciones entre matrices de acoplamiento y parámetros  $S$  responden a las ecuaciones de la sección 3.2. Representando éstos parámetros podemos obtener la respuesta en frecuencia objetivo:

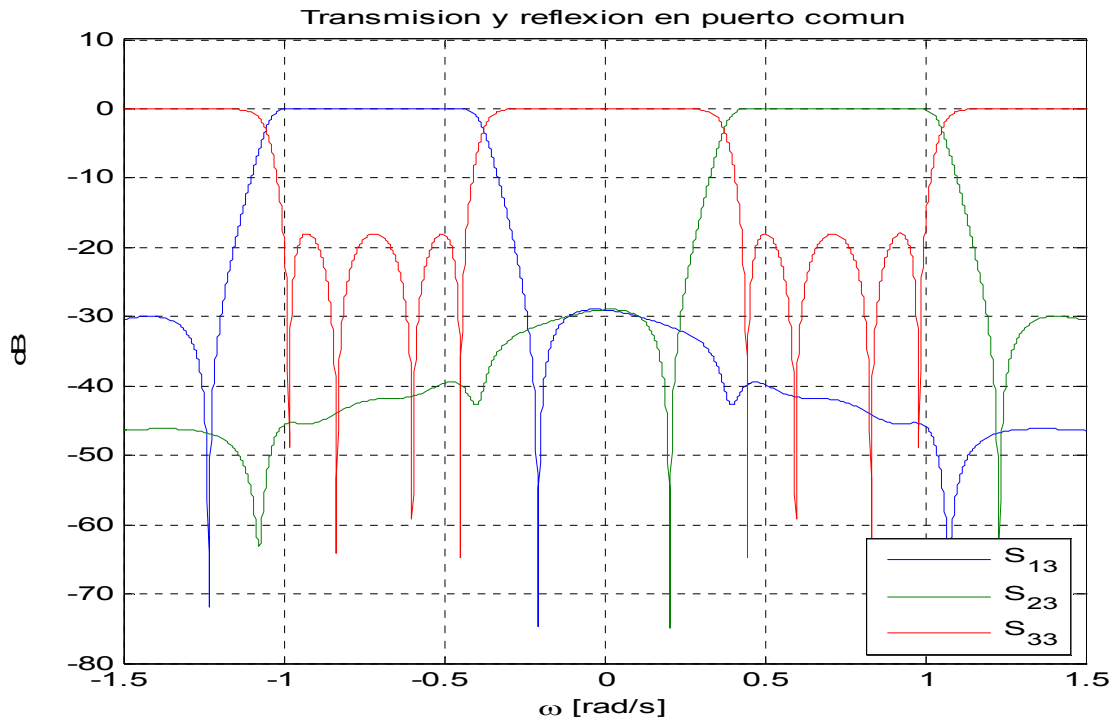


Figura 36: Respuesta en frecuencia objetivo del diplexor

Analizando el resultado obtenido podemos observar como la respuesta de cada canal es simétrica respecto a la del canal opuesto, tomando como referencia la frecuencia central equidistante de ambas bandas de paso. Por lo tanto, las pérdidas de reflexión en el puerto común también presentarán simetría.

Adicionalmente, debido a los dos ceros de transmisión simétricos, la respuesta de cada canal será simétrica respecto a su frecuencia central. Sin embargo se puede observar que esta simetría no es total debido, principalmente, a la aparición de ceros parciales.

Por otro lado, el flanco de la banda de paso en el que está situado cada cero y su posición están escogidos de tal modo que la selectividad entre canales sea elevada, consiguiendo una atenuación mejor que 30 dB. Esta atenuación es elevada, teniendo en cuenta que los filtros son de orden relativamente bajo, la ausencia de elementos auxiliares que puedan incrementar el aislamiento y la separación entre las bandas de paso de 0.4 rad/s para anchos de banda de 0.6 rad/s (ambos valores normalizados).

Nótese el hecho de que, excepto para las redes transversales no triviales (aquellas que únicamente poseen un sólo filtro con dos puertos y en las que sí que podría conseguirse unir puertos y resonadores evitando cualquier tipo de cruce entre acoplamientos), el resto de redes transversales no serán realizables en sentido físico (tal y como se estudió en la sección 3.6).

Para transformar la topología transversal en otra realizable físicamente, se utilizarán las rotaciones de Givens (sección 3.4), y donde se utilizarán como parámetros iniciales la matriz de acoplamientos obtenida directamente de la síntesis analítica así como la topología deseada. El objetivo de estas rotaciones será el de obtener una respuesta idéntica a la ideal (figura 33), ya que son transformaciones de semejanza, y que además cumpla con una topología especificada realizable como la siguiente:

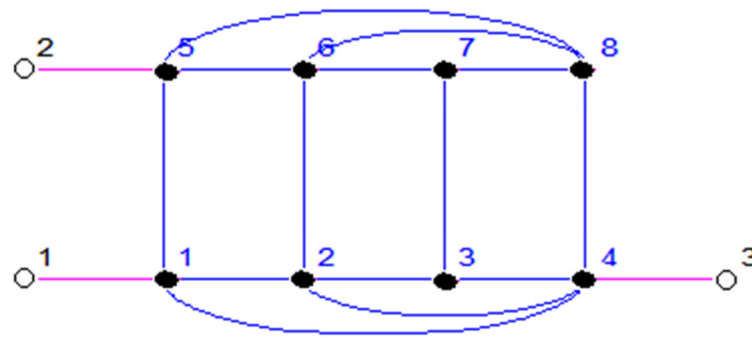


Figura 37: Topología especificada realizable de un diplexor con dos canales de cuarto orden

Si se observa la respuesta obtenida después de las rotaciones de Givens (figura 34), se puede comprobar como ésta sigue siendo la misma respuesta objetivo, ya que se trata de una transformación de semejanza.

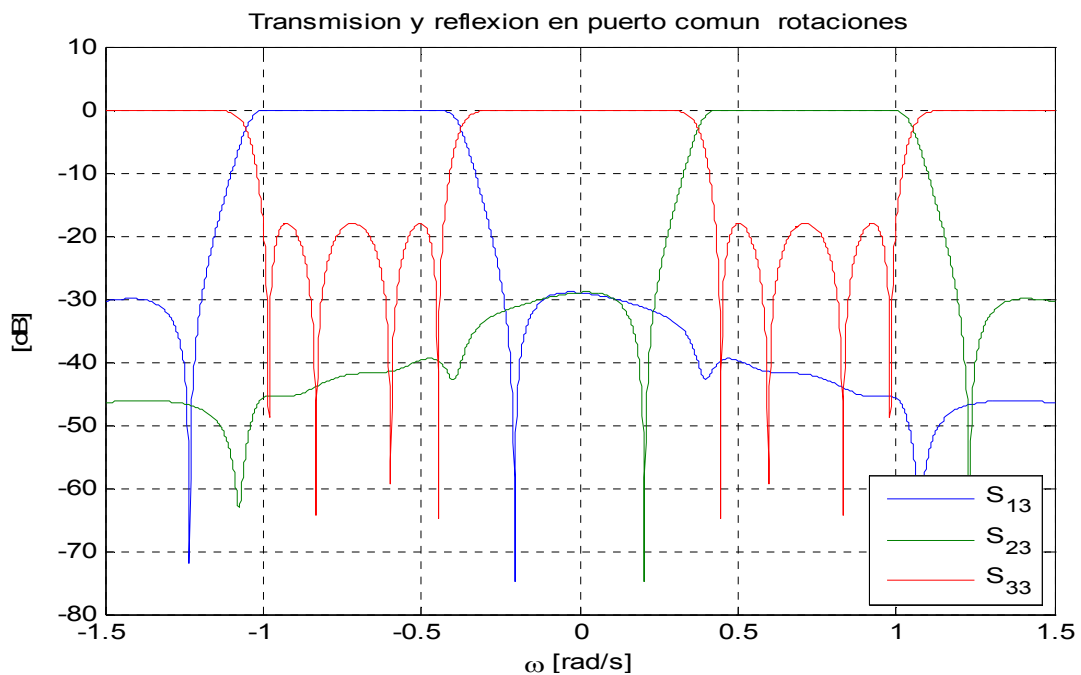


Figura 38: Respuesta de la síntesis analítica tras las rotaciones de Givens

Sin embargo, como se ha explicado anteriormente, el proceso de las rotaciones de Givens no es completamente ideal en el sentido de que no consigue anular completamente todos los acoplamientos deseados, si bien los coeficientes que se deseaban anular serán prácticamente despreciables (con respecto a los valores de los coeficientes correspondientes a la topología). Además, como consecuencia de las transformaciones causadas por las posiciones de pivotado y los problemas de resolución, algunos coeficientes que anteriormente tenía un valor nulo, podrían pasar a tener un valor despreciable, pero no completamente nulo, es decir, la matriz de acoplamientos (semejante a (4.2)) obtenida tras el proceso de rotaciones presenta el siguiente aspecto:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5215 & 0.0002 & -0.0006 & -0.001 & 0.0005 & -0.003 & -0.004 & 0.0038 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0006 & 0.0009 & 0.0002 & -0.005 & -0.521 & -0.001 & -0.002 & -0.015 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0013 & -0.0003 & -0.0002 & 0.7375 & -0.005 & 0.0038 & 0.0001 & -0.001 \\ 0.5215 & 0.0006 & 0.0013 & 0.7142 & 0.2372 & 0.0003 & -0.042 & 0.0040 & 0.0012 & 0.0013 & -0.002 \\ 0.0002 & 0.0009 & -0.0003 & 0.2372 & 0.6969 & 0.2169 & -0.097 & 0.0009 & 0.0212 & -0.001 & 0.0003 \\ -0.0006 & 0.0002 & -0.0002 & 0.0003 & 0.2169 & 0.6991 & 0.4132 & -0.003 & -0.001 & -0.266 & 0.0002 \\ -0.0003 & -0.004 & 0.7375 & -0.041 & -0.0968 & 0.4132 & 0.0025 & 0.0107 & 0.0000 & 0 & 0.6780 \\ 0.0005 & -0.5213 & -0.0053 & 0.0040 & 0.0009 & -0.0033 & 0.0107 & -0.712 & 0.2357 & 0.0007 & -0.061 \\ -0.0025 & -0.0003 & 0.0038 & 0.0012 & 0.0212 & -0.0006 & 0 & 0.2357 & -0.759 & 0.1908 & -0.091 \\ -0.0036 & -0.0021 & 0.0001 & 0.0013 & -0.0002 & -0.2655 & 0 & 0.0007 & 0.1908 & -0.3980 & 0.348 \\ 0.0038 & -0.0144 & -0.0011 & -0.002 & 0.0003 & 0.0002 & 0.6780 & -0.061 & -0.091 & 0.348 & -0.2440 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Representando la totalidad de los acoplamientos de esta nueva matriz, por pequeños que sean, se obtendría una topología claramente irrealizable, tal y como ilustra la siguiente figura:

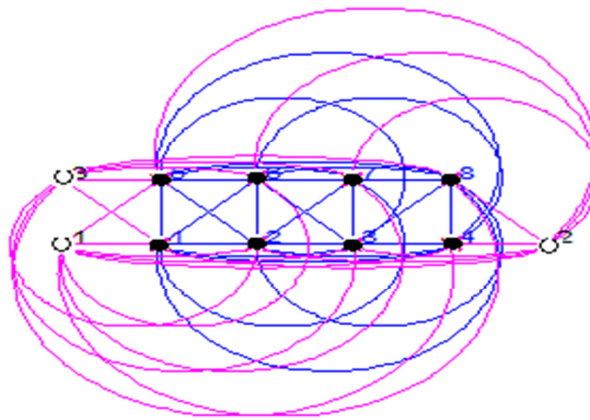


Figura 39: Matriz de acoplamientos tras las rotaciones

Llegados a este punto es donde entrarán en juego las aproximaciones auxiliares (transformaciones no semejantes) mencionadas anteriormente, tales como los truncamientos de los coeficientes de acoplamiento despreciables. Es decir, si elegimos un valor de umbral de, por ejemplo, 0.015 conseguiremos anular aquellos acoplamientos menores que dicho umbral, y por tanto, despreciables en comparación con el resto (acoplamientos principales). Después de realizar estas operaciones obtendremos una red realizable y que, además, coincidirá con la topología especificada (figura 37).

Esta nueva matriz de acoplamientos tendrá por tanto, los mismos coeficientes no nulos que la matriz de topología y además mantendrá los valores obtenidos en (4.3) para

aquellos coeficientes mayores que el umbral y anulando el resto. Por lo tanto, esta nueva matriz de acoplamientos puede ser descrita de acuerdo con la siguiente igualdad:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5215 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5213 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7375 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5215 & 0 & 0 & 0.7142 & 0.2372 & 0 & -0.0415 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2372 & 0.6969 & 0.217 & -0.0968 & 0 & 0.0212 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2169 & 0.6991 & 0.4132 & 0 & 0 & -0.2655 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7375 & -0.042 & -0.097 & 0.4132 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6780 \\ 0 & -0.5213 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7121 & 0.2357 & 0 & -0.0612 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0212 & 0 & 0 & 0.236 & -0.7586 & 0.191 & -0.0913 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2655 & 0 & 0 & 0.191 & -0.3980 & 0.3481 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6780 & -0.061 & -0.092 & 0.348 & -0.2440 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

El inconveniente de esta aproximación, tal y como se ha mencionado con anterioridad, es que distorsiona la respuesta final, al no tratarse de una transformación de semejanza.

Si comparamos esta nueva respuesta obtenida tras trincar aquellos coeficientes de  $M$  menores que el umbral, podemos apreciar algunas diferencias tales como un aumento del valor, en las bandas atenuadas, de los coeficientes de transmisión (en este caso particular de los parámetros  $S_{13}$  y  $S_{23}$ ) aunque los valores de los ceros de transmisión siguen siendo bastante similares (en torno a -70 dB, debido a una pérdida de resolución ya que idealmente serán  $\infty$ ). Podemos observar también como la respuesta de cada canal deja de ser completamente simétrica respecto a la del canal opuesto (tomando como referencia la frecuencia central equidistante de ambas bandas de paso), aunque, sin embargo, las pérdidas de reflexión en el puerto común ( $S_{33}$ ) sí que continúan conservando la simetría. La forma que tiene esta nueva respuesta en frecuencia es la siguiente:

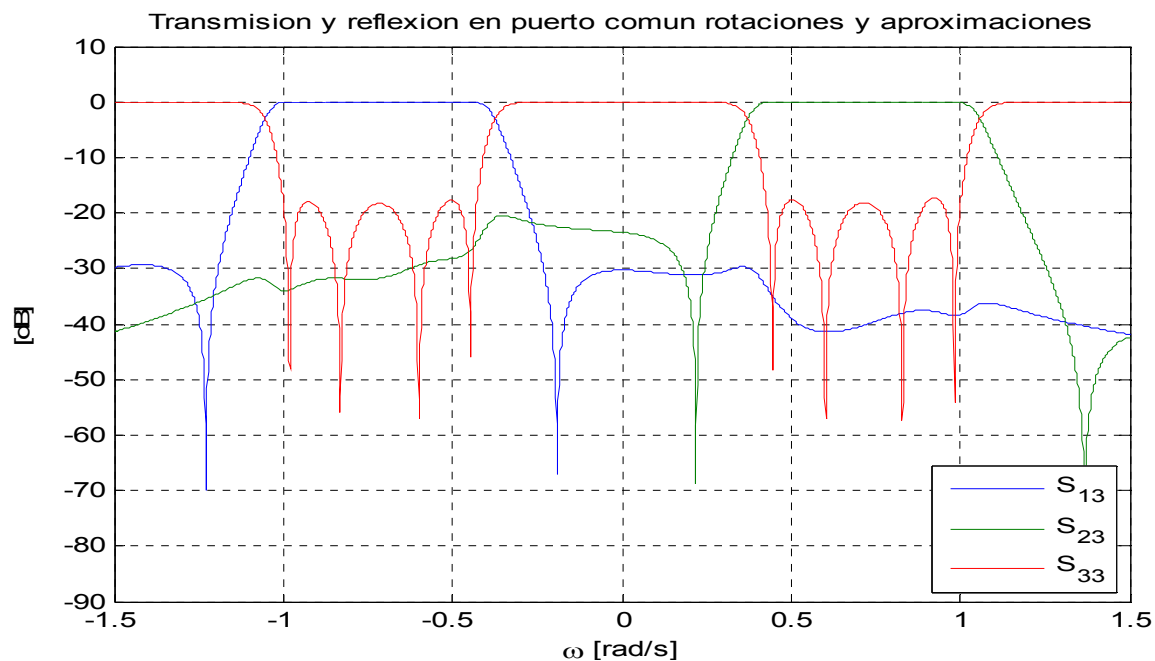


Figura 40: Respuesta en frecuencia tras las aproximaciones por valor de umbral

Como además, debido a que la respuesta especificada tenía dos ceros de transmisión, la respuesta de cada canal, que para el caso de síntesis analítica era simétrica

respecto su frecuencia central, dejará de serlo después de aplicar estas nuevas operaciones. El resto de características tales como orden, ancho de banda, frecuencias centrales de los canales, etc. se mantendrán invariantes.

Cabe destacar el hecho de que si el valor umbral elegido es demasiado grande, entonces se eliminarán más acoplamientos de los necesarios, pudiendo darse el caso en el que puertos o resonadores aparezcan completamente aislados del resto de la red, lo cual es completamente erróneo puesto que modificará el orden de la red así como la respuesta en frecuencia.

A continuación se ilustra el resultado de utilizar un valor de umbral mayor que el óptimo, por ejemplo 0.03, lo cual provoca la eliminación de más acoplamientos de los que originalmente tenía la topología especificada. En la nueva topología resultante (figura 41) puede notarse como existe un menor número de acoplamientos que en la topología inicial (figura 37).

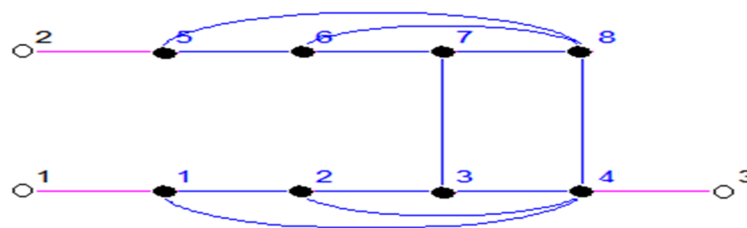


Figura 41: Topología resultante tras usar umbral alto

El hecho de tener un número menor de acoplamientos que los especificados en la topología inicial, no representará nunca un problema a la hora construir físicamente la red, sin embargo, el principal inconveniente surgirá a la hora de evaluar la respuesta en frecuencia, ya que ésta puede verse altamente distorsionada, llegando a perder simetrías en sus parámetros, disminuyendo el valor de las atenuaciones entre canales en las bandas no adyacentes o perdiendo selectividad entre canales tal y como ilustra la figura 42:

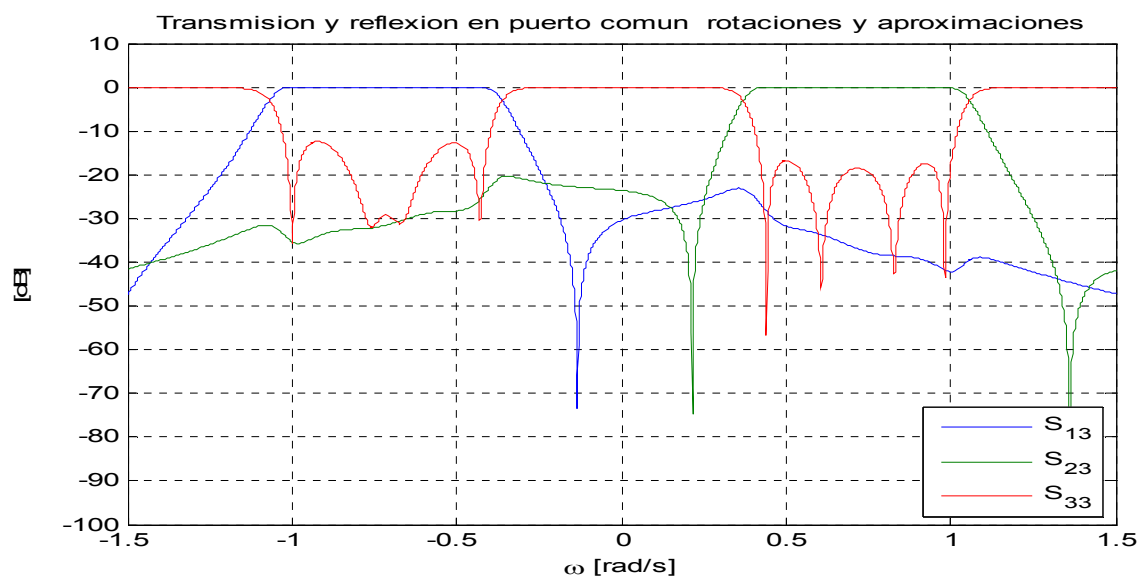


Figura 42: Respuesta en frecuencia tras rotaciones y truncamientos para un umbral alto

Si seguimos aumentando aún más el valor del umbral mínimo de forma que todavía se eliminen más acoplamientos, obtendremos topologías de redes cada vez más sencillas y respuestas cada vez peores. Esto se puede apreciar fácilmente en el siguiente ejemplo en que se ha usado un valor de umbral de 0.1. El resultado de anular los coeficientes de  $M$  menores que este umbral proporciona la siguiente topología:

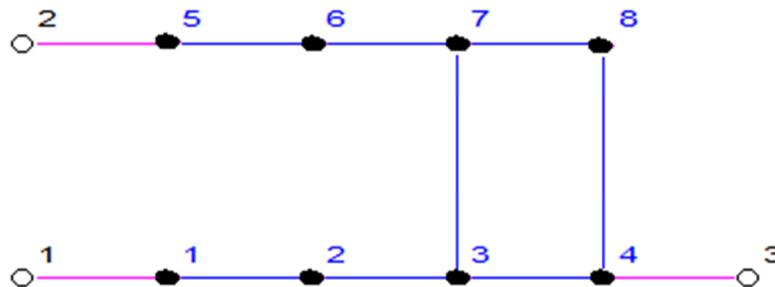


Figura 43: Topología resultante tras utilizar umbral muy alto

Esta topología es todavía más sencilla que las obtenidas en los ejemplos anteriores (además de ser claramente realizable), sin embargo, la respuesta en frecuencia correspondiente a esta nueva topología es bastante mala pues prácticamente no se puede diferenciar los parámetros especificados, si bien se mantienen las bandas de paso:

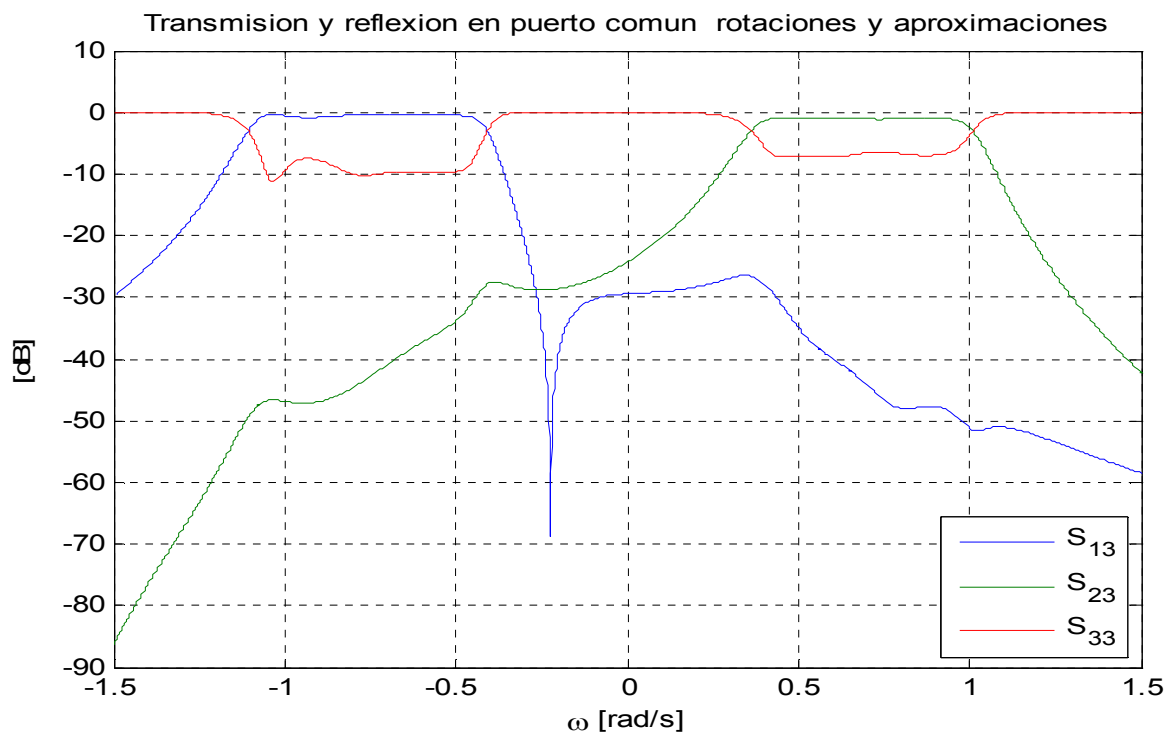


Figura 44: Respuesta en frecuencia tras utilizar un umbral demasiado alto

Para umbrales mayores destruimos la red y con ella la idea del multiplexor, por lo que no podrán ser especificados.

Si por el contrario se eligiesen valores de umbrales menores que el óptimo (el cual proporcionaba la topología especificada), lo que obtendremos serán topologías con un mayor número de acoplamientos (y con ello un incremento en las posibilidades de que

éstas no sean realizables), pero también se obtendrán respuestas en frecuencia más parecidas a la ideal. Existirá, por tanto, un compromiso entre la realizabilidad de la topología y la idealidad de la respuesta.

Para ilustrar el caso de la elección de un valor de umbral más bajo del necesario, y continuando con este mismo ejemplo, a continuación se muestra la topología y respuesta resultantes de asignar el valor de 0.005 al umbral.

En primer lugar, la topología obtenida tendrá un mayor número de acoplamientos que la especificada en la figura 37, ocasionando, que en esta ocasión, no sea realizable. La representación de esta nueva topología es la siguiente:

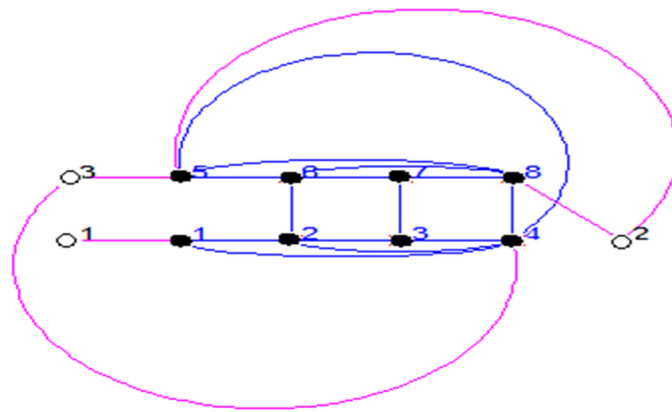


Figura 45: Topología de red tras utilizar un bajo valor de umbral

Sin embargo, dado que la nueva matriz de acoplamientos será más similar a la óptima que en los ejemplos anteriores, la respuesta en frecuencia presentará una menor distorsión comparada con las obtenidas en los ejemplos previos. Esta nueva respuesta presenta el siguiente aspecto:

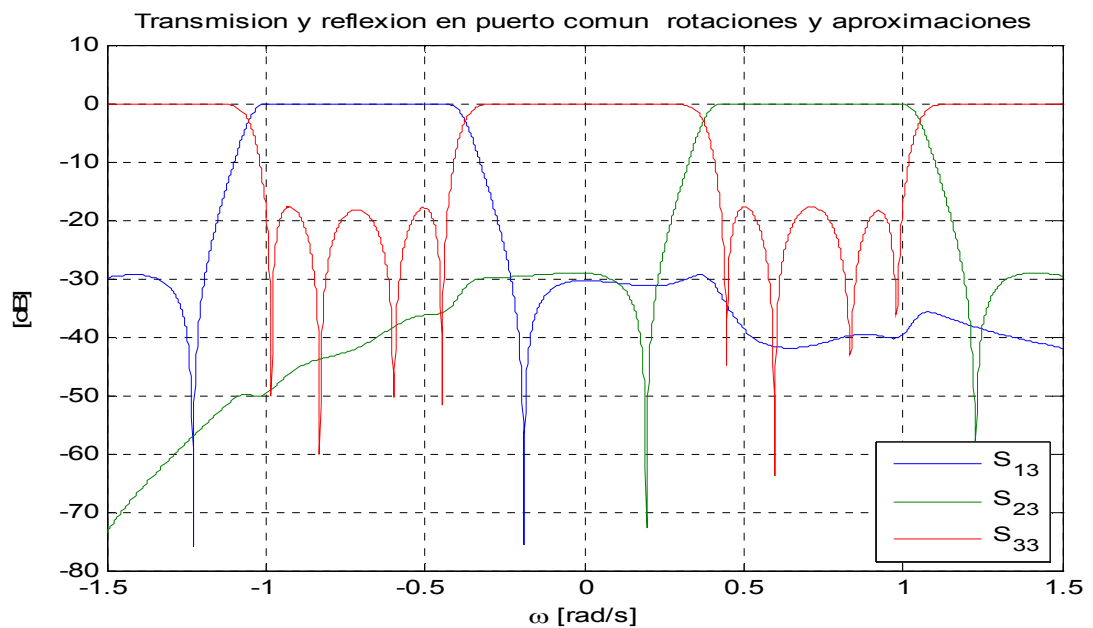
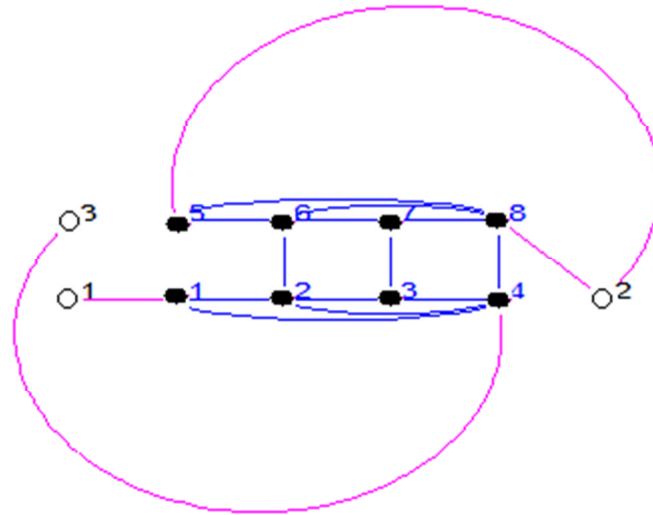


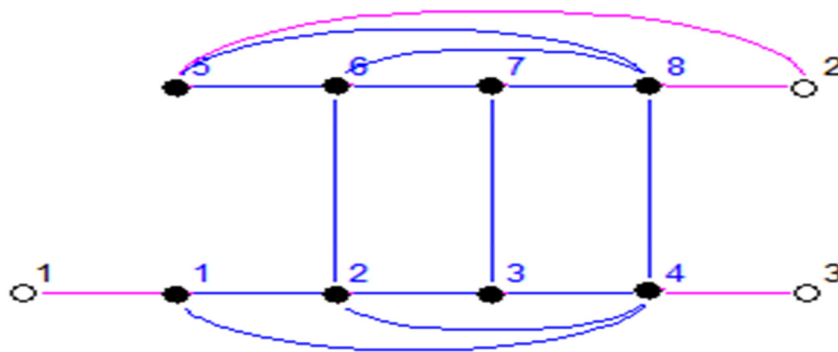
Figura 46: Respuesta en frecuencia tras utilizar un bajo valor de umbral

No obstante, como uno de los objetivos buscados es el de conseguir topologías realizables se deberá elegir un nuevo valor de umbral ligeramente superior al anterior para eliminar aquellos acoplamientos que impiden la realizabilidad de la topología, y al mismo tiempo, que no distorsione demasiado la respuesta en frecuencia final. Podemos observar como si se elige un valor de umbral igual a 0.11, la topología de red obtenida pasará a ser realizable:



**Figura 47: Topología de red realizable usando valores de compromiso de umbral**

Como podemos observar esta topología es claramente realizable, e incluso una recolocación de las posiciones de los puertos puede proporcionar una representación más simple, tal y como se ilustra en la siguiente figura:



**Figura 48: Representación alternativa de una topología realizable para un valor de umbral adecuado**

En cuanto a la respuesta en frecuencia de esta red, podemos observar como a medida que la topología se va aproximando a la obtenida mediante el proceso de síntesis analítica, también lo hace la respuesta en frecuencia:



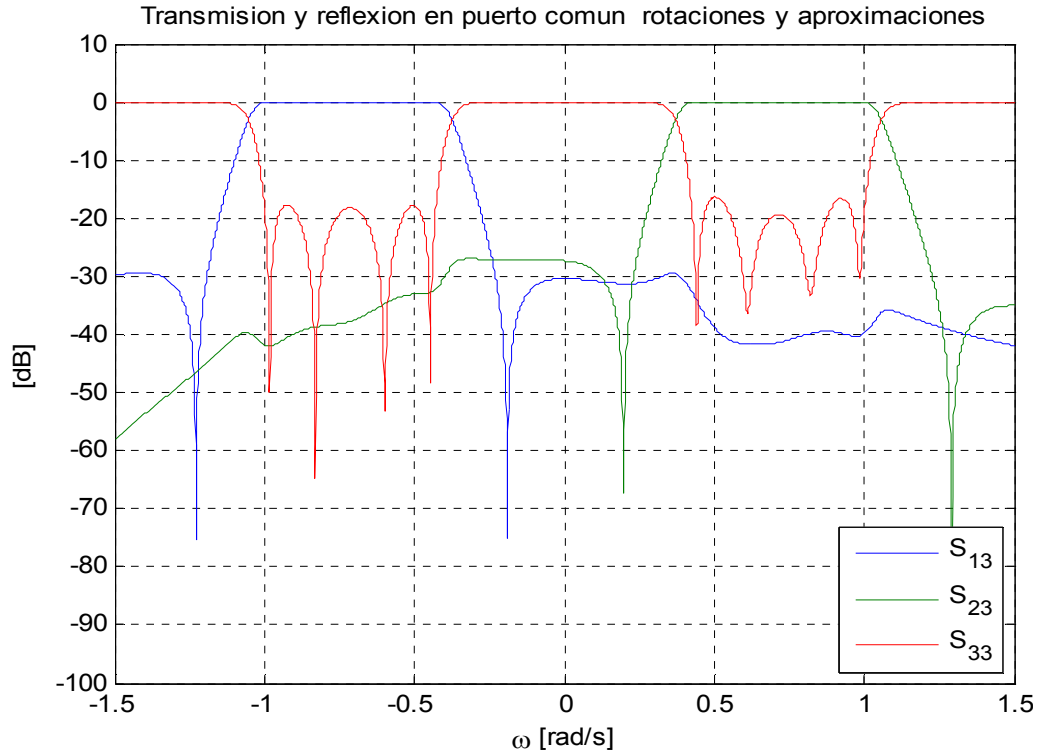


Figura 49: Respuesta en frecuencia con valor de umbral intermedio

Si comparamos esta respuesta con la ideal (figura 36) podemos apreciar como en esta nueva aproximación, además de perder la simetría de las pérdidas de reflexión en el puerto común (el parámetro  $S_{33}$  ya no simétrico respecto a su frecuencia central (0 rad/s)), la selectividad entre canales también empeora, aunque el resto de características de la respuesta no se verán tan distorsionadas como en casos anteriores en los que el valor de umbral era claramente inadecuado (figura 42) y (figura 44).

#### 4.2.1.2 Triplexor con unión distribuida:

Este segundo ejemplo de síntesis se corresponde con un multiplexor de tres canales, o triplexor, sin ceros de transmisión.

Se podrían incluir ceros de transmisión para aumentar la selectividad entre canales adyacentes, pero en este ejemplo no se utilizarán.

El reparto de potencia entre los canales se producirá por acoplamiento directo entre los resonadores que lo componen. De esta forma, el orden de la red completa será igual a la suma de los órdenes de los canales.

Como contrapartida, la unión distribuida presenta un aislamiento algo peor que otros métodos de unión (tales como una unión mediante un resonador fuertemente acoplado [1]) y además la síntesis no será exacta ya que la respuesta que se obtendrá no será idéntica a la especificada. No obstante, se trata de una red completamente realizable, ya que los canales tendrán disposición lineal de los resonadores sin acoplamientos cruzados.

El resto de características de este triplexor con unión distribuida se encuentran especificadas en la siguiente tabla:

PARÁMETRO	CANAL 1	CANAL 2	CANAL 3
Orden	4	4	4
Frecuencia central (GHz)	12.25	12.3	12.35
Ancho de banda (MHz)	20	20	20
Rizado de los canales (dB)	20	20	20
Posición de los ceros de transmisión (rad/s)	-	-	-

Tabla 3: Especificaciones del triplexor con unión distribuida

La topología para un triplexor con unión distribuida es la siguiente:

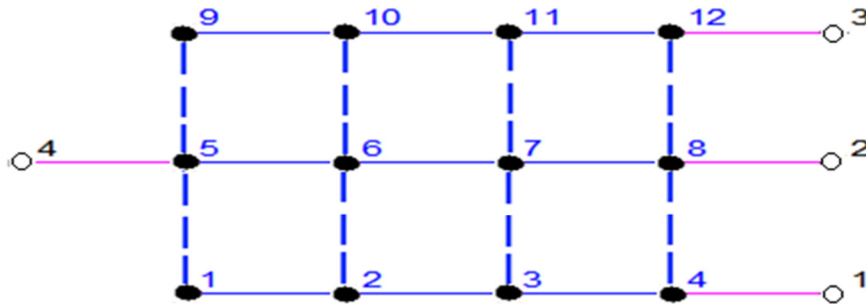


Figura 50: Distribución de nodos y acoplamientos para un triplexor con unión distribuida. Línea continua: acoplamientos dentro de un canal. Línea discontinua: acoplamientos entre canales.

Como se puede apreciar esta red es sencilla de realizar físicamente (además de ser totalmente implementable), sin embargo, tiene algunos problemas en cuanto a la respuesta en frecuencia se refiere.

De acuerdo con las especificaciones (tabla 3), la síntesis analítica calculará la siguiente respuesta objetivo:

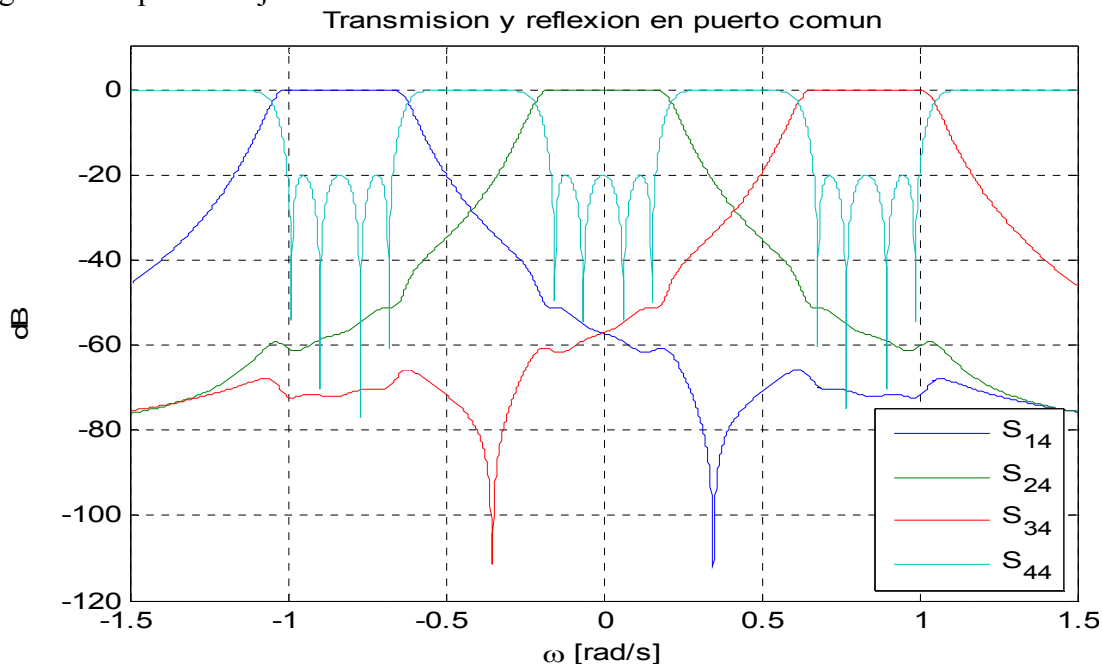
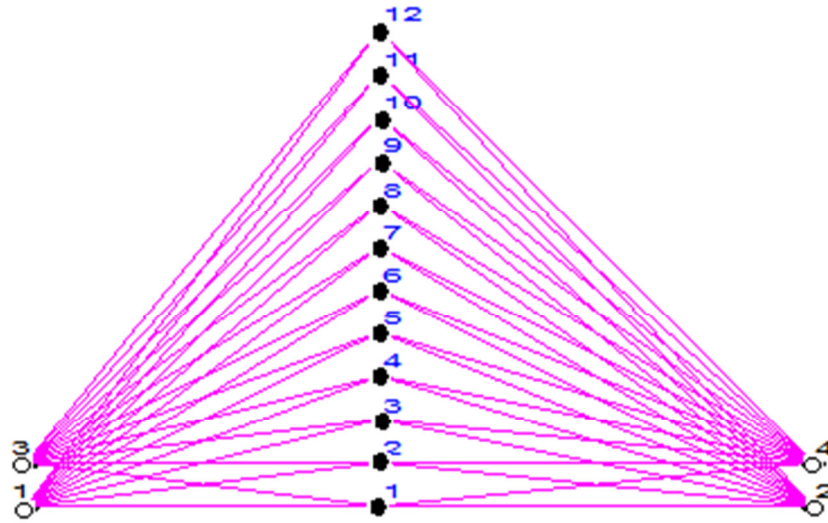


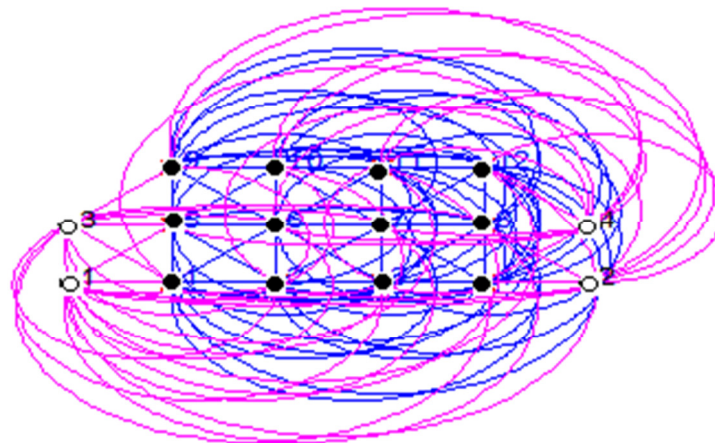
Figura 51: Respuesta en frecuencia ideal para un triplexor con unión distribuida

Esta es la respuesta ideal, pero dicha respuesta se obtiene como resultado de usar una topología de acoplamientos transversal (y por lo tanto no realizable físicamente), obtenida directamente del proceso de síntesis analítica:



**Figura 52: Topología resultante de la síntesis analítica ideal para un triplexor**

Empleando las ya mencionadas rotaciones de Givens (sección 3.4) se intentará obtener una topología como la especificada en la figura 50, tomando como punto de partida la topología de la figura 52. Debido a que estas son transformaciones de semejanza, la respuesta de la red no se verá afectada, sin embargo, la nueva matriz de acoplamientos obtenida tras las rotaciones tendrá la mayoría de sus coeficientes no nulos (si bien aquellos coeficientes que desearan eliminar tendrán un valor despreciable). La nueva topología aparece representada a continuación:



**Figura 53: Topología de un triplexor con todos sus acoplamientos**

En esta nueva topología aparecen todos los acoplamientos de la nueva matriz de acoplamientos por pequeños que sean.

Como se puede observar esta red tampoco podrá ser implementable ya que ni siquiera cumple con una de las condiciones necesarias expuestas por el Teorema de Euler para determinar si, dados un cierto número de vértices (puertos y resonadores) y aristas (acoplamientos), puede construirse un grafo plano a partir de ellos (sección 3.5).

Procediendo de la misma manera que en los ejemplos anteriores, es decir, truncando aquellos coeficientes menores que un umbral arbitrario, se podría alcanzar un compromiso entre la respuesta en frecuencia y la topología buscada. Sin embargo, para este caso particular, lo que se pretende es que se cumpla con la topología del triplexor con unión distribuida (figura 50), por lo que para obtener la nueva matriz de acoplamientos bastará multiplicar escalarmente y elemento a elemento, la matriz “binaria” de topología por la matriz de acoplamientos obtenida tras las rotaciones de Givens. El resultado es una repuesta en frecuencia que distorsiona ligeramente la respuesta objetivo:

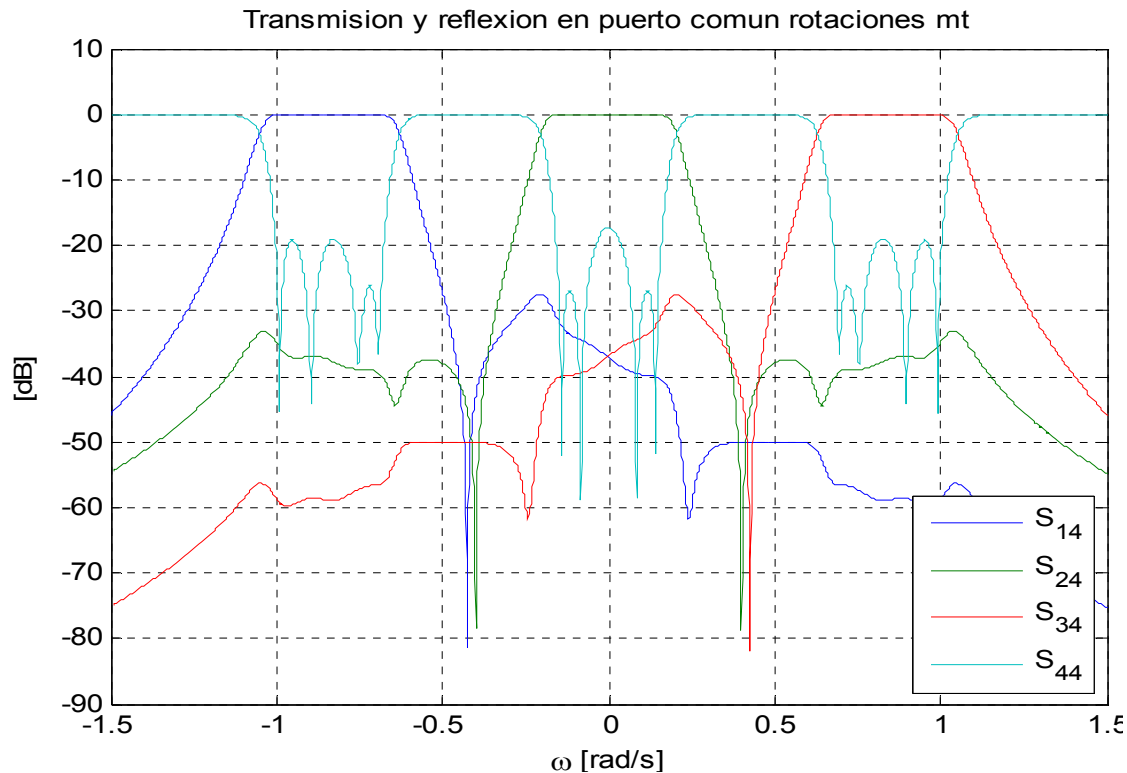


Figura 54: Transmisión y reflexión en el puerto común para un triplexor con unión distribuida

Como se puede apreciar, esta nueva respuesta presenta pequeñas distorsiones con respecto a la ideal (figura 51), aunque se conservarán las simetrías, es decir, el parámetro de reflexión en el puerto común ( $S_{44}$ ) es simétrico respecto a la frecuencia central normalizada (0 rad/s) y los parámetros de transmisión ( $S_{14}$  y  $S_{34}$ ) son simétricos uno respecto del otro y con respecto del canal central. Adicionalmente se puede observar cómo sigue existiendo una alta selectividad entre canales.

#### 4.2.1.3 Multiplexor de 10 canales de orden 4

Finalmente, para ilustrar una de las muchas posibilidades que ofrece este tipo de síntesis, a continuación se ilustrará uno de los casos más extremos de este método, un multiplexor de diez canales, cada uno de orden cuatro, con lo que el orden completo de la red será cuarenta (suma de los órdenes de los canales). La tabla de especificaciones será similar a las ilustradas en los ejemplos anteriores con la salvedad de que en este caso existirán un mayor número de canales:

PARÁMETRO	CANAL 1	CANAL 2	CANAL 3	CANAL 4	CANAL 5	CANAL 6	CANAL 7	CANAL 8	CANAL 9	CANAL 10
Orden	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Frecuencia central (GHz)	12.25	12.3	12.35	12.4	12.45	12.5	12.55	12.6	12.65	12.7
Ancho de banda (MHz)	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Rizado de los canales (dB)	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Ceros de transmisión	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 4: Especificaciones del multiplexor de 10 canales de orden 4

La matriz de topología de este ejemplo será transversal con un gran número de cruces entre todos sus acoplamientos, por lo que no será realizable físicamente. Sin embargo, la respuesta frecuencia cumplirá con las especificaciones de la tabla 4, así como con el resto de características de los multiplexores explicadas anteriormente, tales como simetrías, selectividad entre canales adyacentes, etc.

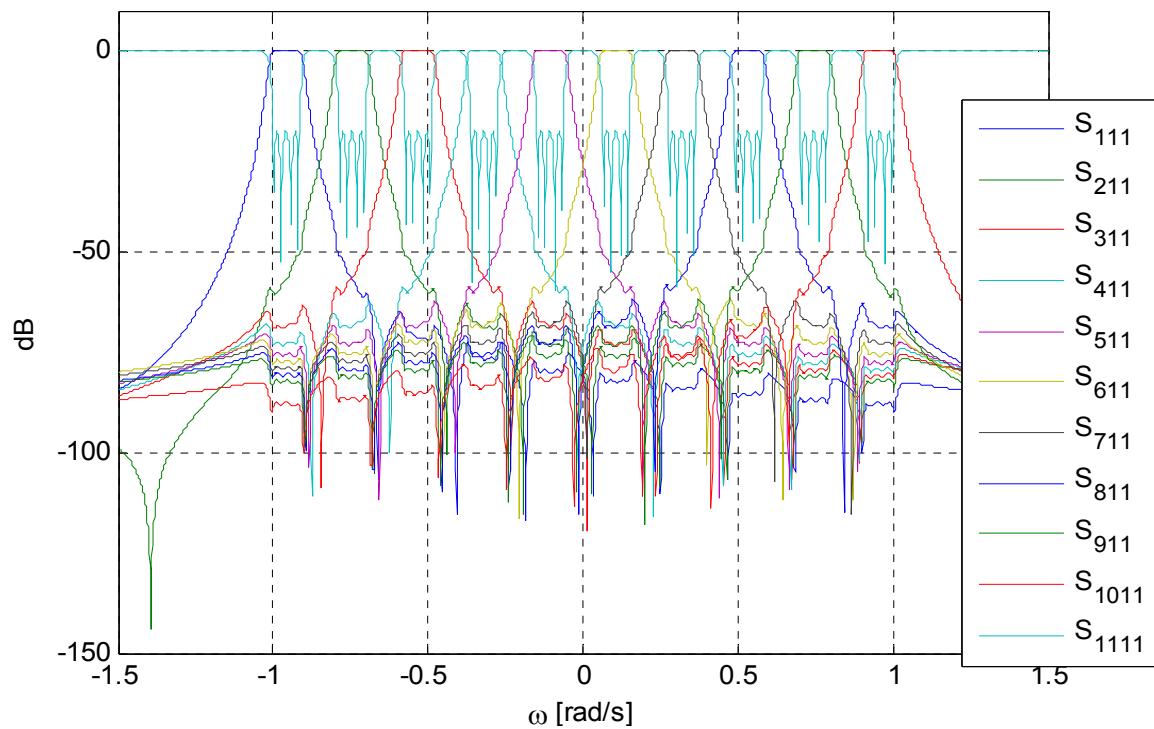


Figura 55: Respuesta en frecuencia para un multiplexor de 10 canales de orden 4

## 4.2.2 Conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos cabría preguntarse si existe la posibilidad de multiplicar escalarmente y elemento a elemento la matriz “binaria” de topología por la matriz transversal obtenida tras el proceso de síntesis y previa a las rotaciones de Givens, con el consiguiente ahorro computacional. Pues bien, el resultado de esta operación sería completamente incorrecto, ya que, al ser la matriz de acoplamientos transversal, la matriz resultante de la multiplicación escalar de ambas también sería transversal (ya no sería solamente la matriz de topología la que anulase los coeficientes no necesarios).

Por otro lado, la utilización del método de truncamiento de coeficientes por debajo de un umbral arbitrario produce resultados que distorsionan la respuesta en frecuencia y además no funciona con alta precisión, ya que dependiendo del valor del umbral, obtendremos topologías que podrán ser realizables o no, así como respuestas en frecuencia distorsionadas en mayor o menor grado. Tendremos, por tanto, un grado de libertad, correspondiente al valor del umbral con el que podremos alcanzar un compromiso entre la realizabilidad de la topología y la idealidad de la respuesta en frecuencia, ya que estas aproximaciones no son transformaciones de semejanza, tales como las rotaciones de Givens, en las que las modificaciones realizadas sobre la matriz de acoplamientos no afectaban a la respuesta en frecuencia final.

Sin embargo, existe una posibilidad para no tener que realizar truncamientos en la matriz de acoplamientos mediante umbrales y que permite obtener la topología especificada. Para ello bastará con multiplicar escalarmente y elemento a elemento la matriz que especifica la topología (y que será “binaria” al representar los acoplamientos con unos y su ausencia mediante ceros) por la matriz de acoplamientos obtenida tras la aplicación de las rotaciones de Givens a la matriz de acoplamientos resultante de la síntesis analítica. Esta opción produce el mismo resultado que el obtenido utilizando un valor de umbral óptimo con el que se consiguiese la topología especificada. Sin embargo, será más rápida, ya que no se deberá experimentar con distintos valores de umbrales hasta obtener el que produzca como resultado una topología como la especificada inicialmente.

No obstante, mediante la utilización de distintos valores de umbral se podrá realizar un balance entre la realizabilidad de las topologías y la idealidad de la respuesta.

Para poder obtener topologías exactamente como las especificadas, se deberán explorar otros métodos de síntesis tales como la síntesis por optimización (sección 4.3) o la síntesis analítica-optimización (sección 4.4). Adicionalmente, se intentará que la respuestas obtenidas usando las matrices de acoplamientos correspondientes a esas topologías produzcan una respuesta en frecuencia lo más parecida posible a la ideal.

## 4.3 Síntesis por optimización

La síntesis por optimización fija la topología y trata de encontrar los coeficientes de la matriz de acoplamientos que den lugar a una respuesta lo más parecida a la ideal.

En general, las topologías fijadas serán realizables, y es que aquí reside el punto fuerte de este tipo de síntesis: siempre obtendrá redes que puedan ser construidas físicamente. El precio a pagar será que, en general, la respuesta en frecuencia estará distorsionada con respecto a la objetivo.

La síntesis por optimización ha sido ampliamente descrita para filtros [8]. Sin embargo, la generalización de la síntesis mediante optimización a redes de  $p$  puertos requiere tener en cuenta algunas particularidades respecto al caso de sólo dos puertos:

- Al aumentar el número de puertos, la respuesta de la red vendrá determinada por un mayor número de parámetros:
  1. Número de coeficientes de reflexión:  $p$  ( $O(p)$ ).
  2. Número de coeficientes de transmisión:  $\frac{p(p-1)}{2}$  ( $O(p^2)$ ).
- Por tanto, las funciones de error han de tener un mayor número de términos relacionados con más parámetros de Scattering de la red, que en el caso de los cuadripolos.
- La ecuación de conservación de potencia se debe seguir cumpliendo:

$$SS^H = SS^* = U_p \quad (4.5)$$

En un caso general, las relaciones entre los parámetros  $S$  de la ecuación anterior son no lineales. Por lo tanto, no podrá llegarse a expresiones cerradas que relacionen unos parámetros con el resto. El resultado será que en muchas ocasiones sólo se disponga de un conocimiento parcial de la respuesta objetivo de la red, en concreto suele haber dos limitaciones:

1. Sólo se conocen algunos parámetros  $S$  del conjunto total.
  2. Además, de éstos sólo se tiene información de su módulo y no de su fase.
- Un algoritmo de síntesis general ha de ser válido para cualquier número de puertos. Por lo tanto, las expresiones de la función de error y de gradiente han de ser vectoriales o matriciales.

### 4.3.1 Funciones de error cuadráticas

La función de error o de costes será la función que se quiere minimizar. En el problema de síntesis el objetivo será el de reducir, en la medida de lo posible, o incluso anular, la diferencia entre dos respuestas en frecuencia:

1. La respuesta obtenida del análisis de la matriz de acoplamientos de la red que se quiere optimizar, representada por medio de la matriz  $S(s) \in \mathbb{C}^{p \times p}$ , y cuyos coeficientes serán los parámetros  $S$  de la red  $S_{ij}(s)$ .
2. La respuesta especificada o respuesta objetivo  $\tilde{S}(s) \in \mathbb{C}^{p \times p}$ , con coeficientes  $\tilde{S}_{ij}(s)$ . El conocimiento de esta matriz será parcial ya que sólo se conocerá su módulo.

Dado que no es posible evaluar los parámetros  $S$  en todas las frecuencias, la respuesta de la red se calculará para un conjunto discreto de puntos de frecuencia  $\{s_m\}$ . De la elección de dichos puntos dependerá la convergencia del proceso de optimización.

En cuanto a la definición del error entre las respuestas calculada y objetivo se deberá definir una medida o norma de la diferencia entre ambas, con las siguientes características:

- Deberá ser mayor o igual que cero
- Se anulará sólo en el caso de que ambas respuestas sean iguales.

De este modo, si existe solución exacta, esta será el mínimo global de la función de error, que además tendrá valor nulo.

Generalmente este tipo de problemas se resolverá mediante funciones de error cuadráticas, es decir, definidas como la suma de términos cuyo valor es proporcional al cuadrado de los errores en los distintos puntos de frecuencia. Las ventajas de los términos cuadráticos respecto a términos de tipo lineal son las siguientes:

1. Las condiciones de signo positivo y anulación se cumplirán sin manipulación adicional.
2. Variación fuerte cuando la diferencia entre las respuestas sea grande, lo que implicará una rápida convergencia.
3. Variación lenta para diferencias pequeñas, lo que evita posibles problemas de oscilaciones o convergencias cerca del óptimo.

### 4.3.1.1 Función de error basada en módulo

En ocasiones no será posible obtener información sobre la fase de los parámetros  $S$ , por lo que habrá que definir una función de error donde se comparen los módulos de estos parámetros  $S$  de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\Sigma = \sum_{k,l} \sum_{m=1}^{n_{kl}} \xi_{kl,m} (|S_{kl}(s_m)| - |\tilde{S}_{kl}(s_m)|)^2 \quad (4.6)$$

#### 4.3.1.1.1 Gradiente de la función de error

Cada uno de los sumandos de la ecuación (4.6) es de la forma general  $(|y(x)| - |y_0|)^2$ , donde  $x$  es la variable independiente,  $y$  es una función de  $x$  e  $y_0$  una constante. Su derivada es la siguiente:

$$\frac{d}{dx} (|y(x)| - |y_0|)^2 = 2 \left( 1 - \left| \frac{y_0}{y(x)} \right| \right) \text{Re} \left( \left[ y(x)^* \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right] \right) \quad (4.7)$$



Por lo tanto, la derivada de la función de error respecto a la variable genérica  $x$  es:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = 2 \sum_{k,l} \sum_{m=1}^{n_{kl}} \xi_{kl,m} \left( 1 - \left| \frac{S_{kl}(s_m)}{\tilde{S}_{kl}(s_m)} \right| \right) \text{Re} \left( \left[ S_{kl}(s_m)^* \frac{\partial S_{kl}(s_m)}{\partial x} \right] \right) \quad (4.8)$$

Donde se ha supuesto que la única dependencia con  $x$  es la de  $S_{kl}(s_m)$ . Este es el caso de si  $x$  es un coeficiente de la matriz de acoplamientos,  $[M]_{ij}$ . Por tanto, la derivada respecto a los coeficientes de acoplamiento, es la siguiente:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial [M]_{ij}} = 2 \sum_{k,l} \sum_{m=1}^{n_{kl}} \xi_{kl,m} \left( 1 - \left| \frac{S_{kl}(s_m)}{\tilde{S}_{kl}(s_m)} \right| \right) \text{Re} \left( \left[ S_{kl}(s_m)^* \frac{\partial S_{kl}(s_m)}{\partial [M]_{ij}} \right] \right) \quad (4.9)$$

### 4.3.2 Proceso de optimización

La optimización se llevará a cabo mediante un algoritmo BFGS [20], que requiere además de la función de error, su gradiente, que es calculado de forma analítica.

Debido a la función de error y al estado inicial de la matriz de acoplamientos, el proceso iterativo de optimización no presentará problemas de convergencia.

Si se evalúa la función de error respecto al número de iteraciones transcurridas y se obtiene como resultado que el error se hace extremadamente bajo o nulo, se podrá concluir que ese proceso de síntesis es exacto, pues los parámetros de la red obtenida serán iguales, en módulo, a los especificados.

Como punto de partida para la optimización se utilizarán unas matrices de acoplamientos previamente calculadas y que contienen valores generales cercanos a los mínimos globales.

El proceso de optimización se basará en una función de síntesis multietapa de multiplexores con un número arbitrario de canales, donde los parámetros de entrada son todas las especificaciones (frecuencia central, ancho de banda, orden, ceros de transmisión y valor de rizado de cada uno de los canales).

La optimización se llevará a cabo en cuatro etapas, y en cada etapa, se introducirán modificaciones respecto a la etapa anterior:

- 1 En primer lugar lo que se procederá será al ajuste de ancho de banda y de la frecuencia central de los canales. Adicionalmente se optimizará el valor de rizado en cada banda de paso.
- 2 El segundo paso se corresponde con la inserción sucesiva de resonadores para poder alcanzar el orden requerido de cada canal.

- 3 En el tercer paso se procederá a la introducción de los ceros de transmisión y de acoplamientos cruzados, de forma que los acoplamientos cruzados no se optimizarán ya que sus valores son los que se corresponderían con filtros aislados.
- 4 Esta es la última etapa de la optimización: en ella se procederá a la optimización completa de la red, incluyendo todos los coeficientes de la matriz de acoplamientos. Esta es la etapa que más recursos computacionales consumirá pues es la que tiene que unir los resultados en cada una de las etapas anteriores sin que estos se modifiquen entre sí en la medida de lo posible.

El resultado final de este proceso de síntesis será la matriz de acoplamientos de la red.

### 4.3.3 Ejemplos

Para ilustrar el funcionamiento de síntesis por optimización analizaremos algunos de los ejemplos ya estudiados en la sección correspondiente a la síntesis analítica (sección 4.2) con el objetivo de comparar los resultados obtenidos mediante ambos procesos.

#### 4.3.3.1 Diplexor

Este primer ejemplo se corresponde con un multiplexor de dos canales (diplexor), con las siguientes características:

PARÁMETRO	CANAL 1	CANAL 2
Orden	4	4
Frecuencia central (GHz)	12.25	12.3
Ancho de banda (MHz)	20	20
Rizado de los canales (dB)	18	18
Posición de los ceros de transmisión (rad/s)	-	-

Tabla 5: Especificaciones del diplexor con canales de orden 4

Una posible topología sencilla para este diplexor es la siguiente:

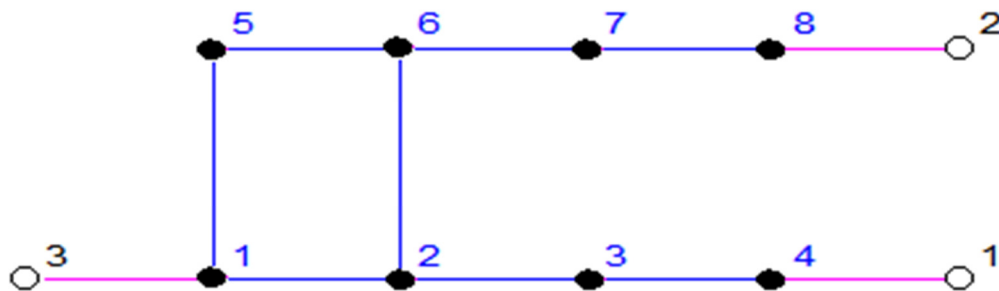


Figura 56: Topología de un diplexor de orden 4

La respuesta objetivo (obtenida mediante síntesis analítica y usando una topología transversal) correspondiente con las especificaciones proporcionadas en la tabla 5 es la siguiente:

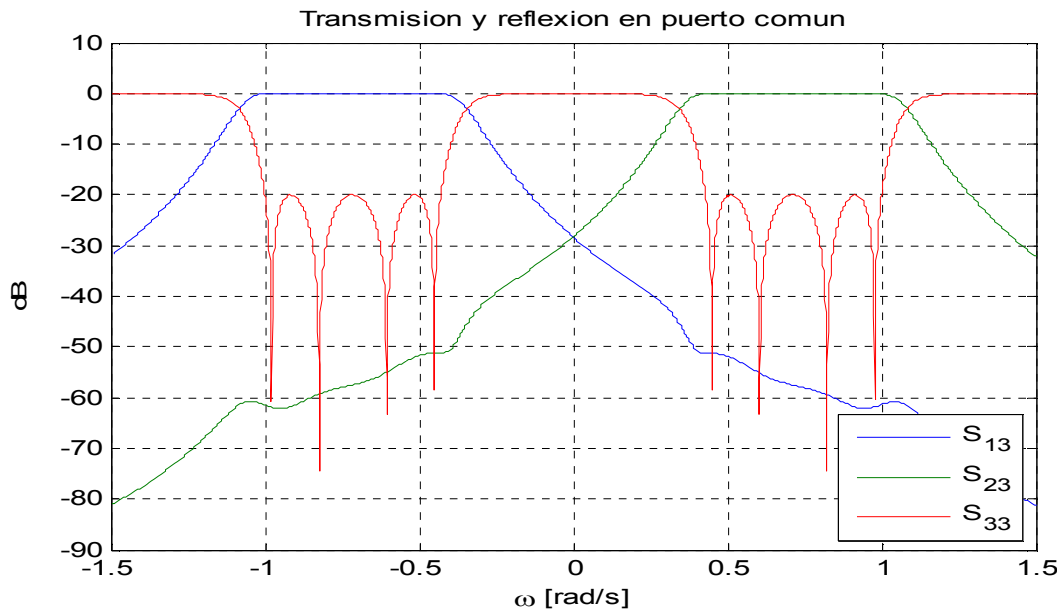


Figura 57: Respuesta en frecuencia objetivo para un diplexor con canales de orden 4

Por otro lado, la respuesta obtenida, para esas mismas especificaciones, usando la síntesis por optimización, es la siguiente:

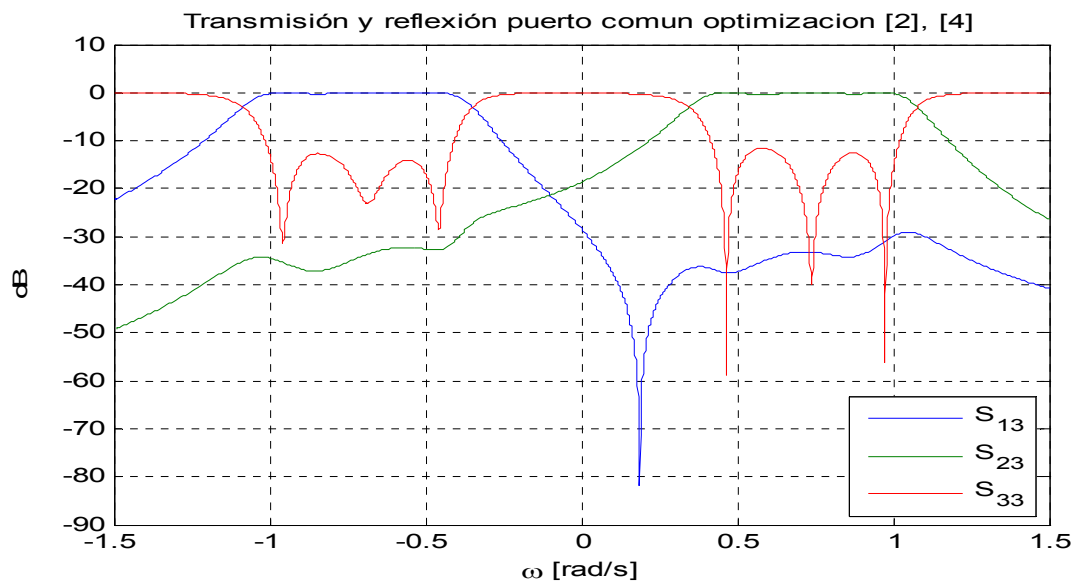


Figura 58: Respuesta en frecuencia usando la síntesis por optimización para un diplexor con canales de orden 4

Como podemos apreciar, la respuesta obtenida mediante la síntesis por optimización se encuentra claramente distorsionada respecto a la respuesta objetivo. Esta repuesta no es exactamente simétrica respecto al puerto común (parámetro  $S_{33}$ ). Adicionalmente, los parámetros de transmisión tampoco son exactamente simétricos uno respecto del otro tomando como referencia el eje de simetría a la frecuencia normalizada de 0 rad/s y correspondiente con la frecuencia central del puerto común.

Sin embargo, la respuesta obtenida para la síntesis analítica, usando una topología no transversal como la de la figura 37, es la que se muestra a continuación:

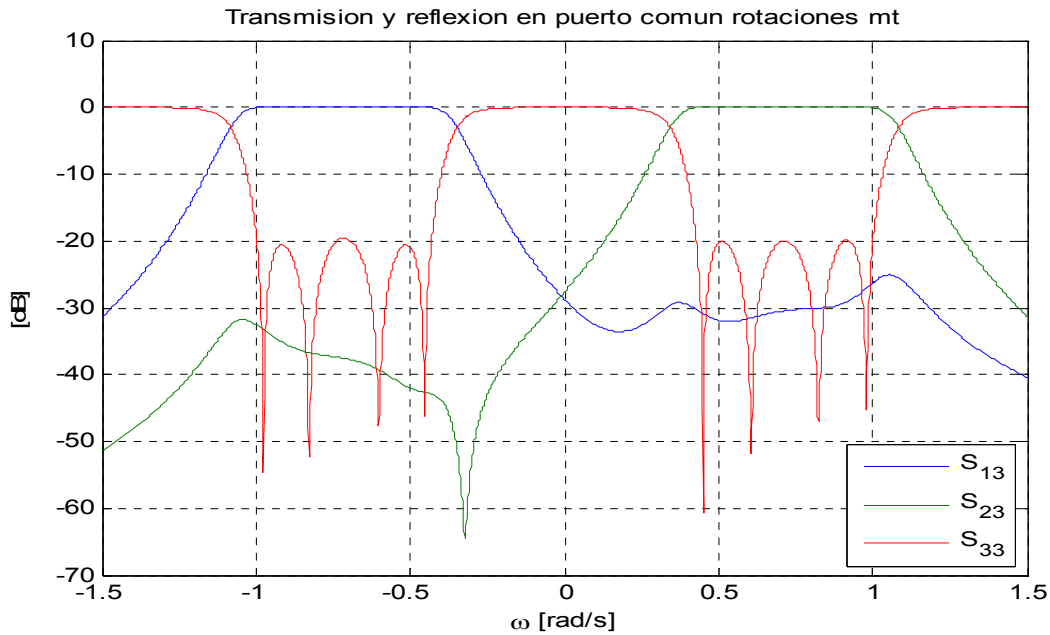


Figura 59: Respuesta en frecuencia utilizando la síntesis analítica y la topología de la figura 33

Como se puede observar, a medida que se reducen el número de coeficientes no nulos de la matriz de acoplamientos en la síntesis analítica, aumenta la distorsión de la respuesta en frecuencia respecto a la respuesta objetivo hasta finalmente obtener un resultado altamente distorsionado con respecto al ideal. Esto es lo que ocurrirá si para la síntesis analítica, en lugar de usar la topología de la figura 37, utilizamos la topología especificada (figura 56):

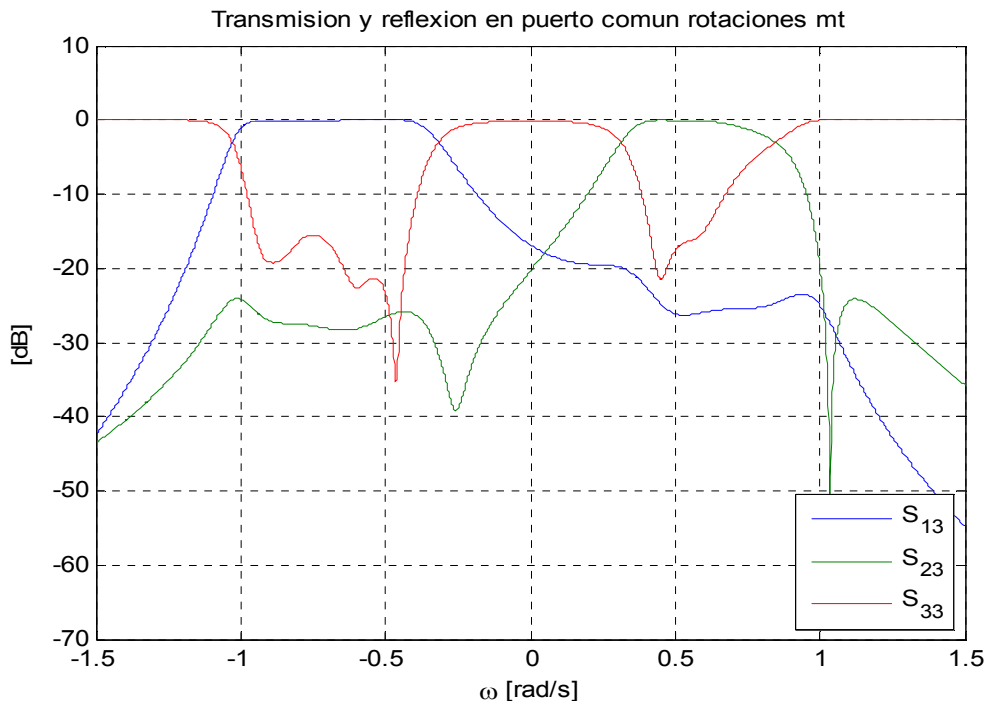


Figura 60: Respuesta en frecuencia de la síntesis analítica truncada para un diplexor con la topología de la figura 52

En primer lugar, se puede observar como el resultado obtenido mediante la síntesis por optimización es mucho mejor que el obtenido usando la síntesis analítica truncada. Esto se debe a que se necesitan muchas operaciones de truncamiento para conseguir una topología exactamente como la especificada en la figura 56. No obstante, el uso de otras topología igualmente realizables aunque con un mayor número de acoplamientos que los estrictamente especificados, producen una respuesta menos distorsionada, tal y como se puede apreciar en la figura 59.

Para concluir, se puede apreciar como ninguno de los métodos llega alcanzar la respuesta objetivo (figura 57), sin embargo, para este caso particular en el que se desea una determinada topología (figura 56) con un bajo número de acoplamientos, la síntesis por optimización será la que proporcione los mejores resultados.

### 4.3.3.2 Triplexor con unión distribuida

Este ejemplo es el mismo que el estudiado en la sección 4.2.1.2 y correspondiente a la síntesis analítica, con el fin de comparar los resultados de ambos métodos de síntesis para unas mismas especificaciones.

Las características de este triplexor aparecen especificadas en la siguiente tabla:

PARÁMETRO	CANAL 1	CANAL 2	CANAL 3
Orden	4	4	4
Frecuencia central (GHz)	12.25	12.3	12.35
Ancho de banda (MHz)	20	20	20
Rizado de los canales (dB)	20	20	20
Posición de los ceros de transmisión (rad/s)	-	-	-

Tabla 6: Especificaciones del triplexor con unión distribuida

La topología de una red para un triplexor con unión distribuida es la presentada en la figura 46, sin embargo, dado que la los acoplamientos de mayor valor, son los más cercanos al puerto común (puerto 4) estos serán los únicos que se usarán a lo largo de este ejemplo, resultando la topología mostrada en la siguiente figura:

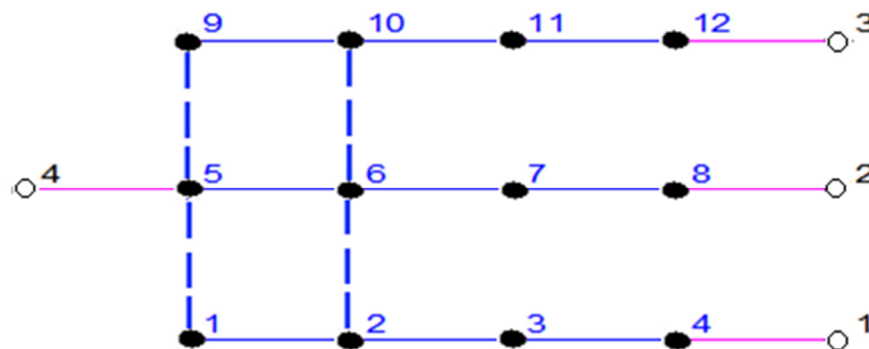
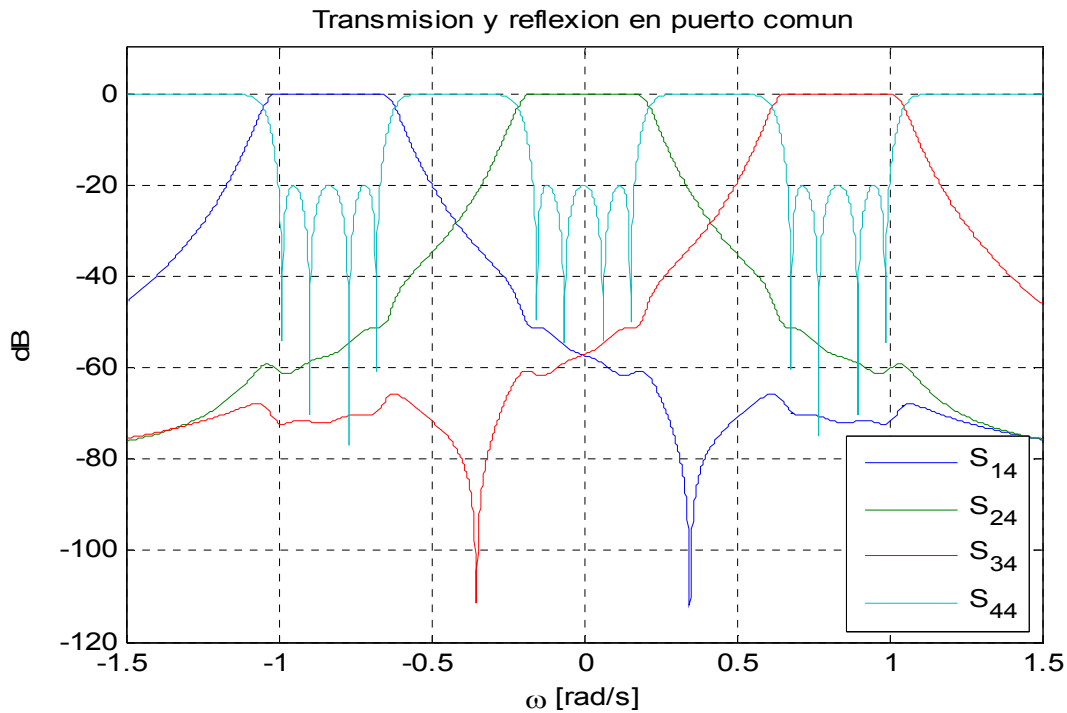


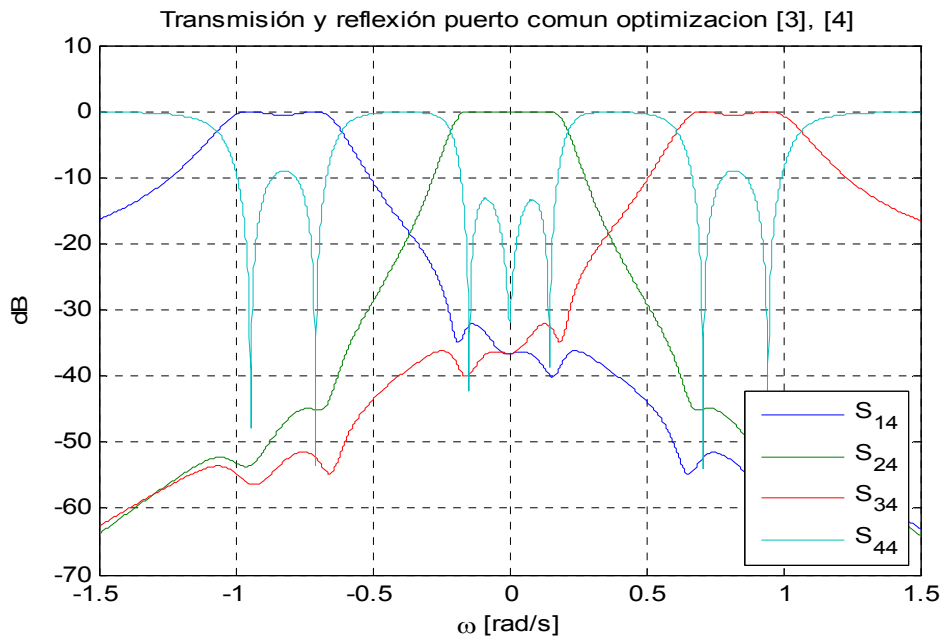
Figura 61: Topología principal para un triplexor con unión distribuida

La respuesta en frecuencia objetivo es la obtenida mediante un proceso de síntesis analítica (y usando una topología transversal):



**Figura 62: Respuesta en frecuencia objetivo del triplexor**

Por otro lado, la respuesta obtenida tras el proceso completo de síntesis por optimización, es la siguiente:



**Figura 63: Respuesta en frecuencia de la síntesis por optimización para un triplexor con unión distribuida**

Analizando esta nueva respuesta podemos observar como el valor de rizado no se mantiene tan constante en torno a los 20 dB especificados. Adicionalmente se puede comprobar cómo el parámetro de reflexión ( $S_{44}$ ) se mantiene simétrico respecto a la

frecuencia central (0 rad/s en frecuencia normalizada). Además se puede observar como cada uno de los canales es simétrico respecto al otro. En definitiva, la respuesta en frecuencia es similar a la objetivo (figura 63).

Por otro lado, la respuesta de la síntesis analítica tras las rotaciones y truncamientos para esta misma topología es la siguiente:

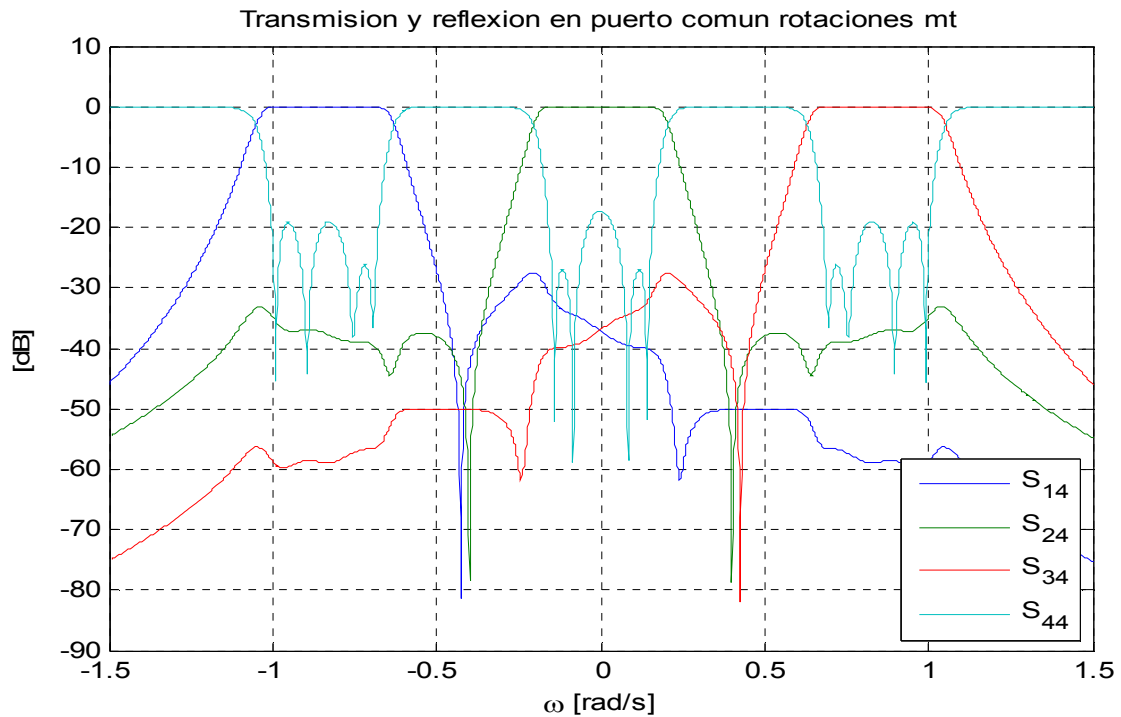


Figura 64: Respuesta en frecuencia síntesis analítica truncada para la topología especificada

Comparando ambas respuestas, puede apreciarse como, para este ejemplo particular, la selectividad entre canales de la respuesta obtenida mediante la síntesis por optimización, es peor que para el caso de la síntesis analítica con rotaciones y truncamientos.

### 4.3.3.3 Multiplexor de 6 canales de orden 7

Este último ejemplo de síntesis por optimización ilustrará el comportamiento de un multiplexor mayor a los estudiados anteriormente para poder apreciar el potencial de este método de síntesis para casos de órdenes elevados. En concreto, este ejemplo representa a un multiplexor de seis canales, cada uno de orden siete. El resto de características aparecen mostradas en la siguiente tabla:

PARÁMETRO	CANAL 1	CANAL 2	CANAL 3	CANAL 4	CANAL 5	CANAL 6
Orden	7	7	7	7	7	7
Frecuencia central (GHz)	12.25	12.3	12.35	12.4	12.45	12.5
Ancho de banda (MHz)	20	20	20	20	20	20
Rizado de los canales (dB)	20	20	20	20	20	20
ceros de transmisión (rad/s)	-	-	-	-	-	-

Tabla 7: Especificaciones de un multiplexor de 6 canales de orden 7

La topología (realizable) correspondiente a los modelos previamente calculados para redes de 6 canales de orden 7, es la siguiente:

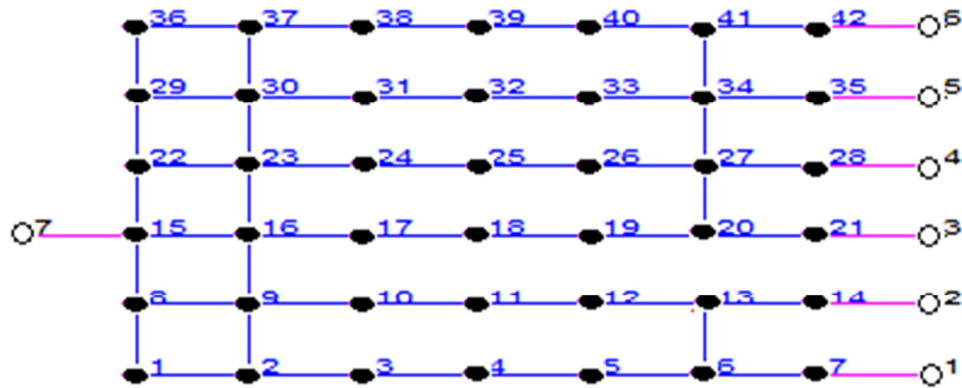


Figura 65: Topología de un multiplexor de 6 canales de orden 7

La respuesta en frecuencia para las especificaciones de la tabla 7 y para la topología especificada (figura 65) es la siguiente:

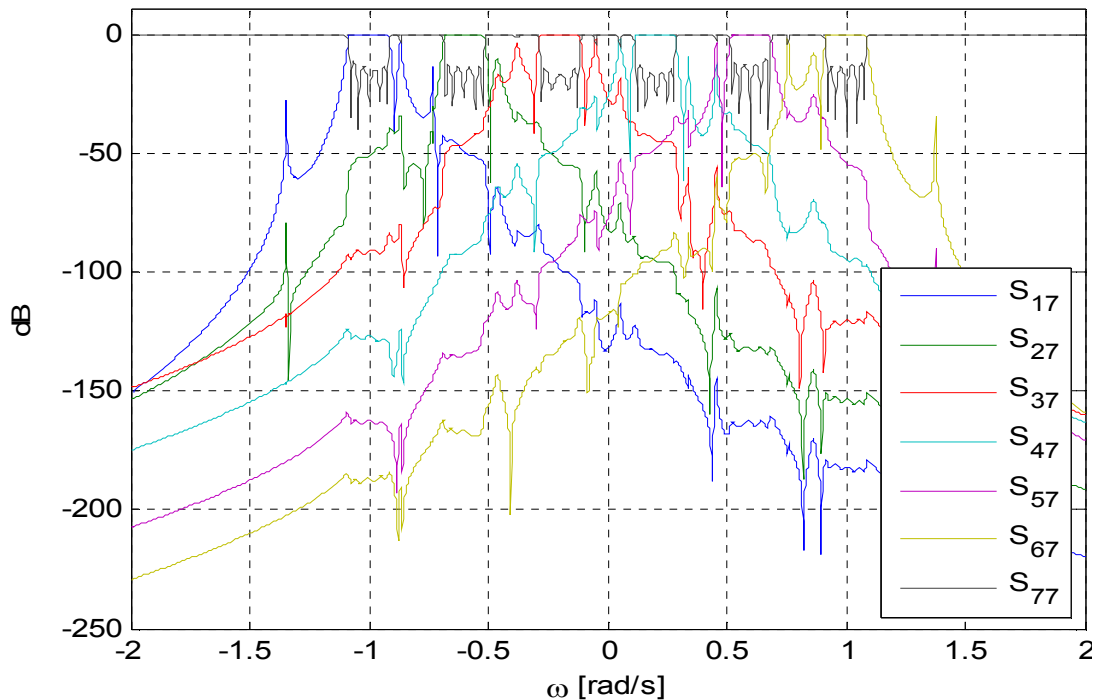


Figura 66: Respuesta en frecuencia para un multiplexor de 6 canales de orden 7

Cabe destacar el hecho de que mientras que para números de canales y órdenes relativamente bajos este método funciona con gran rapidez, para este ejemplo particular donde tanto el número de canales como el orden ya empiezan a ser elevados, el tiempo de ejecución se incrementa notablemente, pudiendo pasar de los apenas diez segundos empleados en los ejemplos correspondientes a diplexores y triplexores a los quince minutos empleados para la simulación de este ejemplo.



### 4.3.4 Conclusiones

A tenor de los resultados obtenidos en esta sección, podemos concluir que la síntesis por optimización cumple con las expectativas propuestas, es decir, es capaz de obtener topologías realizables a costar de distorsionar ligeramente la respuesta en frecuencia final.

Sin embargo, para aplicar la síntesis por optimización será necesario disponer previamente de unas matrices de acoplamiento anteriormente calculadas y cuyos coeficientes serán próximos a los óptimos. Si estas matrices no existiesen el proceso obtendría unos resultados bastante distorsionados con respecto a la respuesta ideal correspondiente.

Finalmente cabe destacar el hecho de que la síntesis por optimización consume una gran cantidad de recursos computacionales, en especial cuando se utiliza para optimizar multiplexores con un número de canales y órdenes elevados.

## 4.4 Síntesis analítica - optimización

Llegados a este punto se han visto las fortalezas y debilidades de cada uno de los dos métodos de síntesis. Cabría por tanto preguntarse si existe la posibilidad de aunar las ventajas de ambos métodos para obtener un proceso de síntesis que utilice las mejoras de cada uno de ellos para conseguir una respuesta lo más parecida posible a la objetivo y que, además, permita la utilización de topologías realizables. Por este motivo, en esta sección se explicará el desarrollo de un nuevo método de síntesis que combine las ventajas de los dos anteriores.

Se empezará usando la síntesis analítica, que fijará la respuesta objetivo (a partir de las especificaciones) y que obtendrá como resultado una matriz de acoplamientos y topología que produzcan como resultado esa respuesta. Posteriormente se hará uso de las rotaciones de Givens para transformar la topología en la deseada sin distorsionar la respuesta. Como se ha visto a lo largo de la sección 4.2 este procedimiento no es completamente ideal, pues la matriz de acoplamientos obtenida tras las rotaciones tendrá la mayoría de sus coeficientes no nulos (aunque los coeficientes que se desean anular serán despreciables comparados con el resto). Esto se solucionó parcialmente mediante el truncamiento de aquellos coeficientes que debía tomar un valor nulo de acuerdo con la topología. Sin embargo, estas no son transformaciones de semejanza, por lo que dependiendo del problema en cuestión, se podría distorsionar la respuesta en frecuencia.

Para disminuir la distorsión de la respuesta así obtenida comparada con la ideal, se empleará la síntesis por optimización (sección 4.3). Ésta tomará como punto de partida la matriz de acoplamientos resultante de las rotaciones anteriores ya truncada, por lo que se

cumplirá que la topología concuerda con la deseada. Partiendo de esta nueva matriz de acoplamientos y con la topología ya fijada se optimizarán los valores de los coeficientes tratando de obtener una repuesta lo más parecida posible a la ideal.

Cabe destacar el hecho de que aunque las matrices de acoplamientos ya truncadas no den como resultado una respuesta ideal, sí que son una buena manera de comenzar, y es por este motivo por lo que se toman como punto de partida para este nuevo método. Gracias a esto, las matrices de acoplamiento previamente calculadas y almacenadas usadas en la síntesis por optimización ya no serán necesarias con la consiguiente ventaja en aquellos casos en los que éstas no existiesen ni la necesidad de tenerlas almacenadas.

## 4.4.1 Ejemplos

La mejor forma de ilustrar el comportamiento de este nuevo proceso de síntesis conjunta será mediante el uso de ejemplos. En concreto, se analizarán algunos de los ya estudiados en las secciones anteriores (sección 4.2 y sección 4.3). El objetivo será demostrar la ventaja de este nuevo proceso con respecto a los anteriores.

### 4.4.1.1 Diplexor

El primer ejemplo será el mismo caso sencillo del diplexor que el visto en las secciones anteriores y que tenía las siguientes características:

PARÁMETRO	CANAL 1	CANAL 2
Orden	4	4
Frecuencia central (GHz)	12.25	12.3
Ancho de banda (MHz)	20	20
Rizado de los canales (dB)	18	18
Posición de los ceros de transmisión (rad/s)	-	-

Tabla 8: Especificaciones del diplexor con canales de orden 4

Una topología de acoplamientos sencilla para de este diplexor es la siguiente:

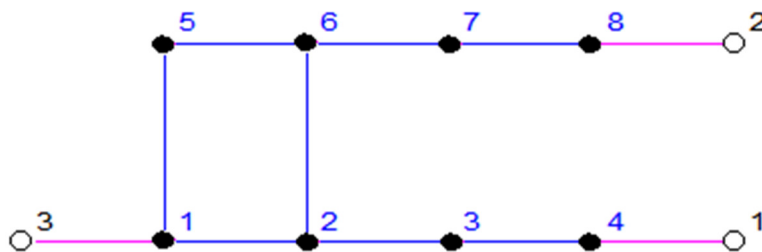


Figura 67: Topología sencilla para un diplexor con canales de orden 4

La respuesta en frecuencia objetivo es la obtenida tras aplicar la síntesis analítica teniendo en cuenta solamente las especificaciones iniciales y utilizando una topología transversal es la mostrada a continuación:

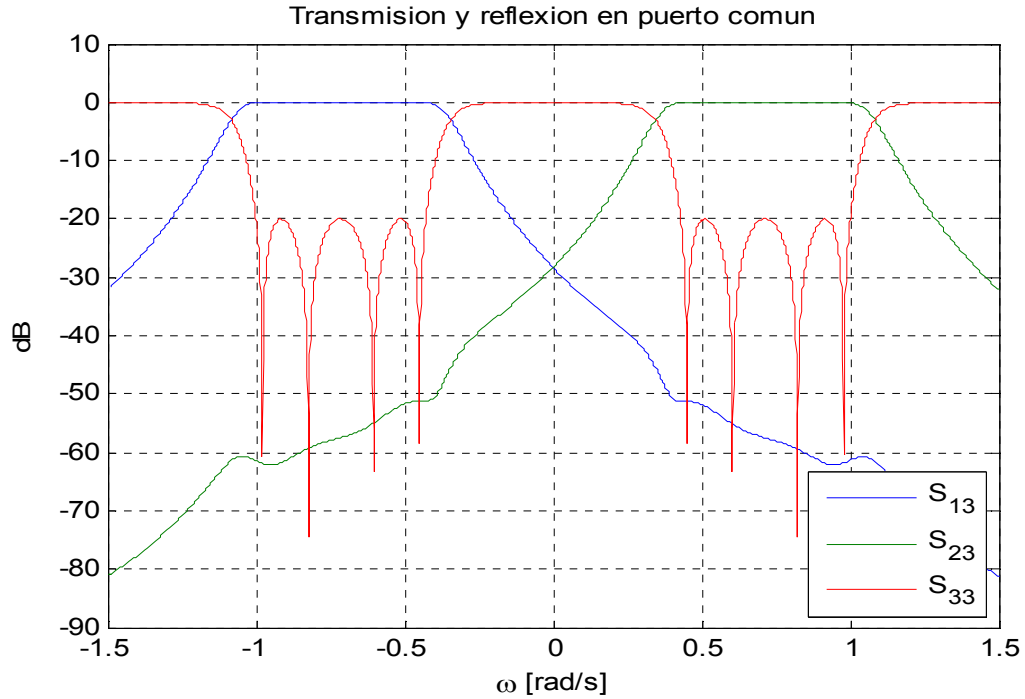


Figura 68: Respuesta objetivo de un diplexor con canales de orden 4

Sin embargo, la utilización de las rotaciones y posteriores truncamientos para adaptarse a la topología especificada en la figura 67 producían una respuesta altamente distorsionada con respecto a la objetivo:

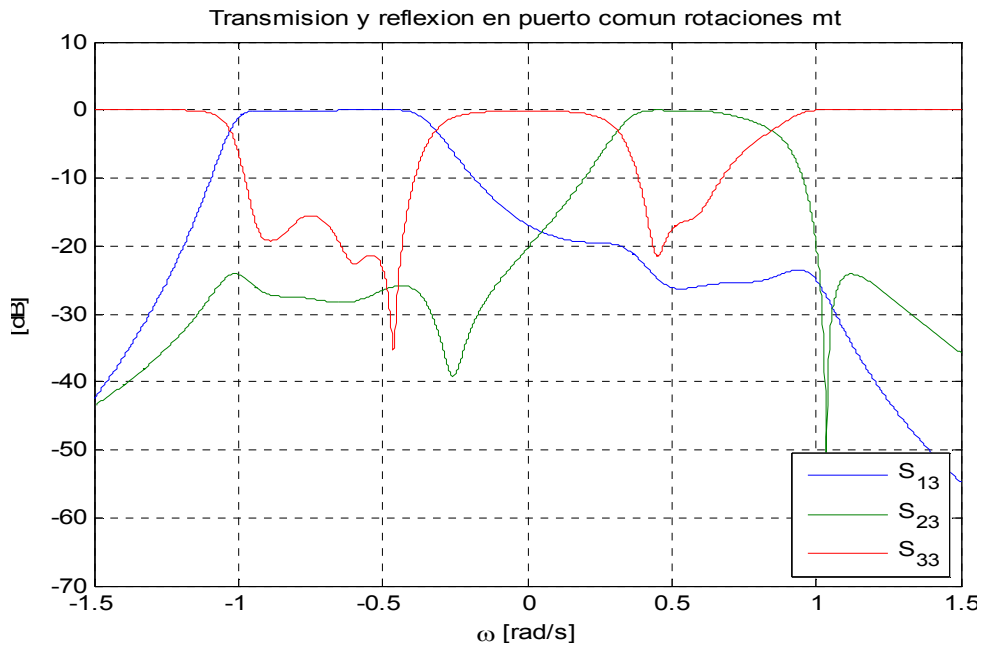


Figura 69: Respuesta en frecuencia tras síntesis analítica con rotaciones y truncamientos utilizando un diplexor con una topología sencilla

Por otro lado, si en lugar de trincar los acoplamientos no deseables de la matriz obtenida tras las rotaciones y que distorsionaban la respuesta (figura 69), se utilizan la matriz de acoplamiento truncada como punto de partida de un proceso de síntesis por optimización, estaremos desarrollando el nuevo proceso de síntesis, la síntesis analítica-optimización, la cual produce como resultado la siguiente respuesta:

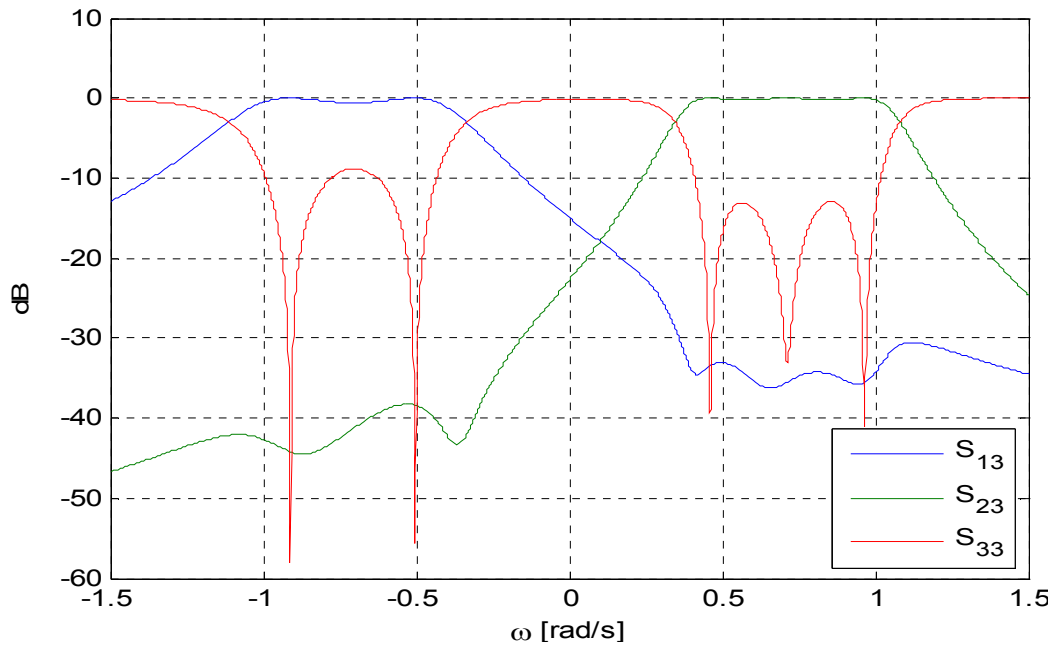


Figura 70: Respuesta del diplexor tras la síntesis analítica-optimización

Aunque esta respuesta no es idéntica a la objetivo, podemos ver como mejora bastante con respecto a la calculada sin usar la optimización (figura 69).

Utilizando la síntesis por optimización y tomando como parámetro de entrada una matriz de acoplamientos previamente calculada y almacenada, la cual tiene la topología de la figura 67, se puede observar el siguiente resultado:

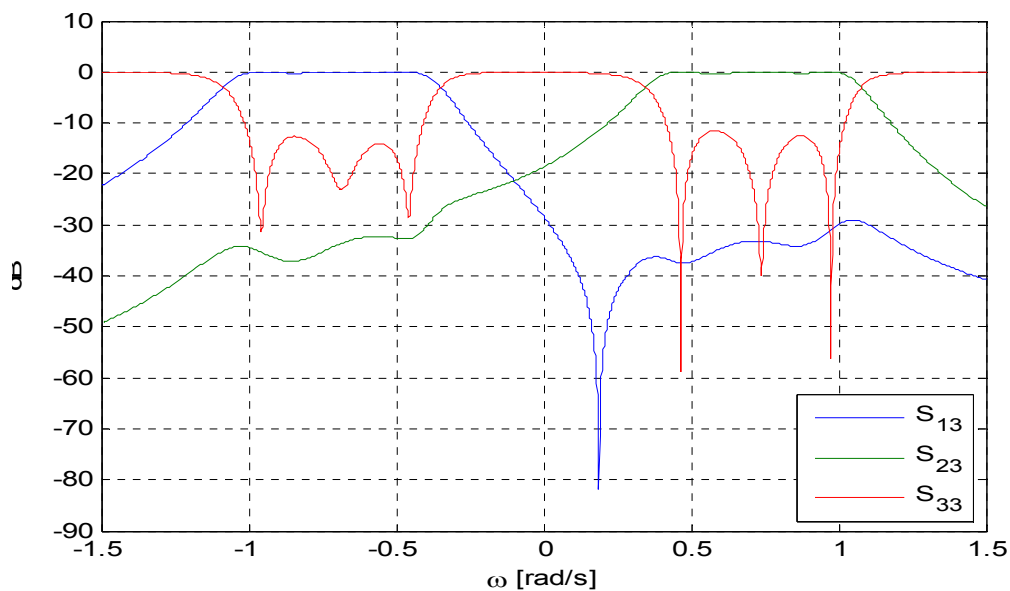


Figura 71: Respuesta en frecuencia del diplexor utilizando síntesis por optimización

Observando esta respuesta, podría parecer que la distorsión con respecto al modelo ideal es menor que la obtenida mediante la síntesis conjunta (analítica-optimización), pero si observamos detenidamente el parámetro de transmisión  $S_{13}$  podemos observar como aparece un cero de transmisión adicional.

Por otro lado comparando el error (4.6) de cada método, se puede demostrar que para el proceso de síntesis analítica-optimización éste será menor que para la síntesis por optimización o que para la síntesis analítica, con lo que el uso de este nuevo tipo de síntesis quedará totalmente justificado.

Como el punto de partida de esta síntesis conjunta (matriz de acoplamientos obtenida tras aplicar rotaciones y truncamientos) era una matriz que producía una respuesta en frecuencia muy distorsionada, a continuación se utilizará una nueva topología con mayor número de acoplamientos, pero que sigue siendo realizable, con la que se intente mejorar dicha respuesta en frecuencia.

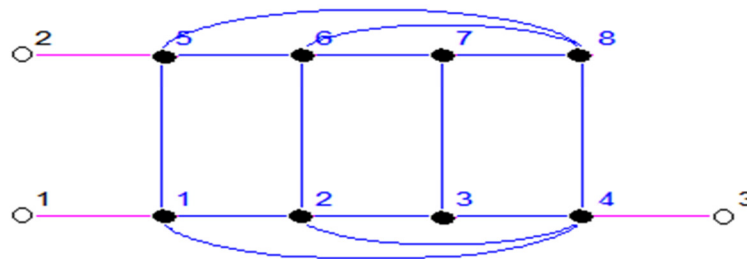


Figura 72: Topología válida para un diplexor con canales de orden 4

La respuesta objetivo en este caso seguirá siendo la misma que para el caso anterior (figura 68), pues las especificaciones no cambian, pero se puede apreciar como la respuesta obtenida tras la síntesis analítica con rotaciones y truncamientos ha mejorado notablemente:

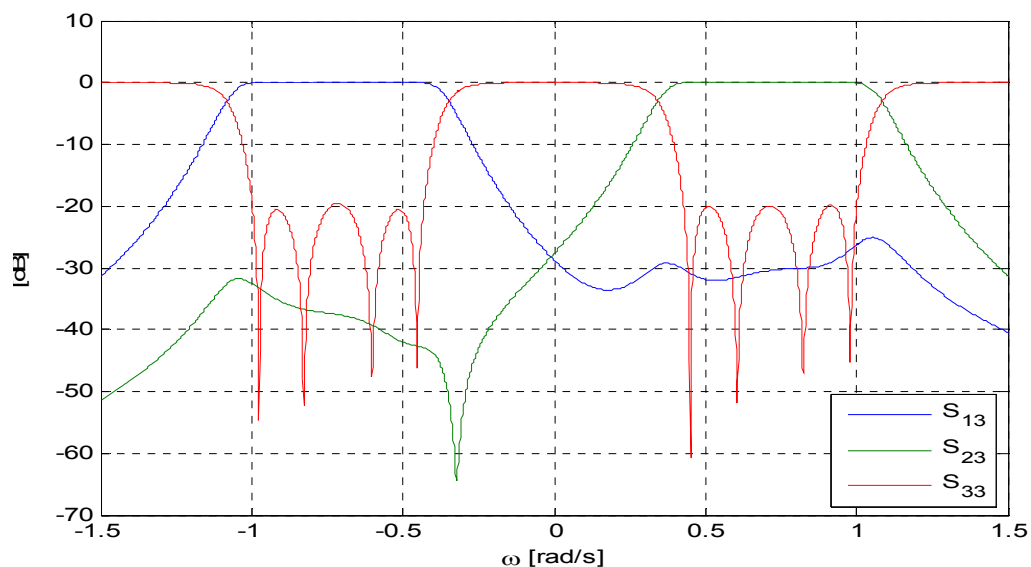


Figura 73: Respuesta en frecuencia tras aplicar la síntesis analítica con rotaciones y truncamientos utilizando una topología más adecuada

Como se puede apreciar esta respuesta ya se parece bastante a la objetivo, aunque el parámetro de transmisión  $S_{23}$  presenta un cero de transmisión adicional.

El hecho de comenzar la síntesis conjunta con unos parámetros iniciales que ya se parezcan a los ideales facilitará el trabajo de la optimización, y de este modo, se podrán

obtener unos resultados más próximos a los objetivo. El resultado de la síntesis conjunta es el mostrado a continuación:

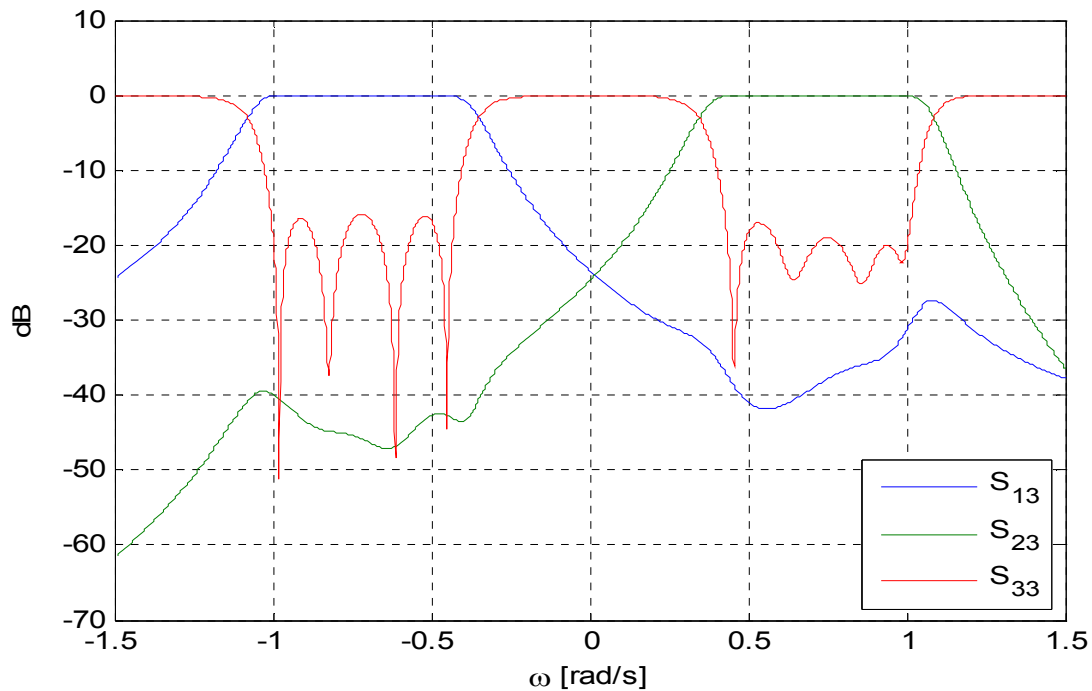


Figura 74: Respuesta en frecuencia tras utilizar la síntesis analítica-optimización usando la topología de la figura 72

Se puede notar que aunque el parámetro de reflexión en el puerto común ( $S_{33}$ ) haya perdido parte de su simetría, los parámetros de transmisión  $S_{12}$  y  $S_{23}$  han mejorado considerablemente su comportamiento con respecto a la síntesis analítica truncada, ya que en este nuevo ejemplo no aparecerán ceros de transmisión adicionales y la forma de éstos será más parecida a la de la respuesta objetivo. Además, el aislamiento entre canales es mejor. Por lo tanto, se puede concluir que en este segundo ejemplo la síntesis conjunta produce un resultado más preciso que la síntesis analítica truncada, ya que es la que tiene un menor error (4.6) comparando ambas respuestas con la objetivo.

#### 4.4.1.2 Triplexor con unión distribuida

Este ejemplo se corresponde con el mismo triplexor con unión distribuida que el estudiado en las secciones 4.2 y 4.3 La topología empleada es la mostrada a continuación:

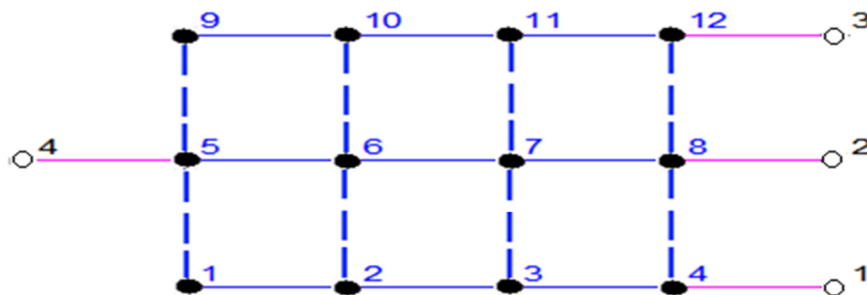


Figura 75: Topología para el triplexor con unión distribuida

El resto de especificaciones son las mostradas en la siguiente tabla:

PARÁMETRO	CANAL 1	CANAL 2	CANAL 3
Orden	4	4	4
Frecuencia central (GHz)	12.25	12.3	12.35
Ancho de banda (MHz)	20	20	20
Rizado de los canales (dB)	20	20	20
Posición de los ceros de transmisión (rad/s)	-	-	-

Tabla 9: Especificaciones del triplexor con unión distribuida

La respuesta objetivo es la que se obtiene directamente de la síntesis analítica utilizando una topología transversal:

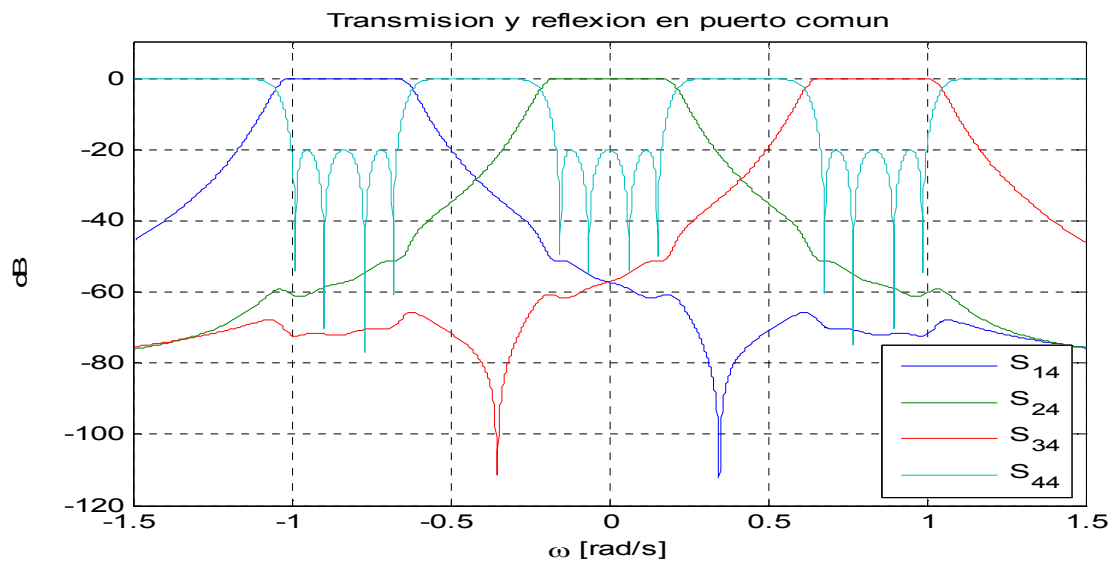


Figura 76: Respuesta objetivo del triplexor

La respuesta obtenida tras las rotaciones y truncamientos distorsiona ligeramente la respuesta objetivo, aunque sigue conservando la mayoría de sus características:

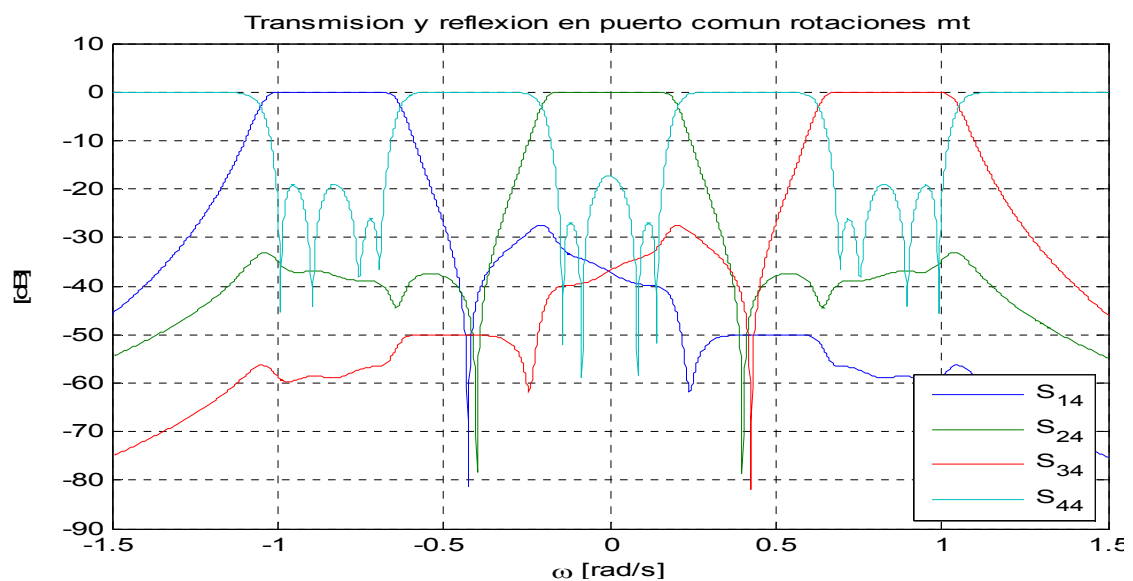
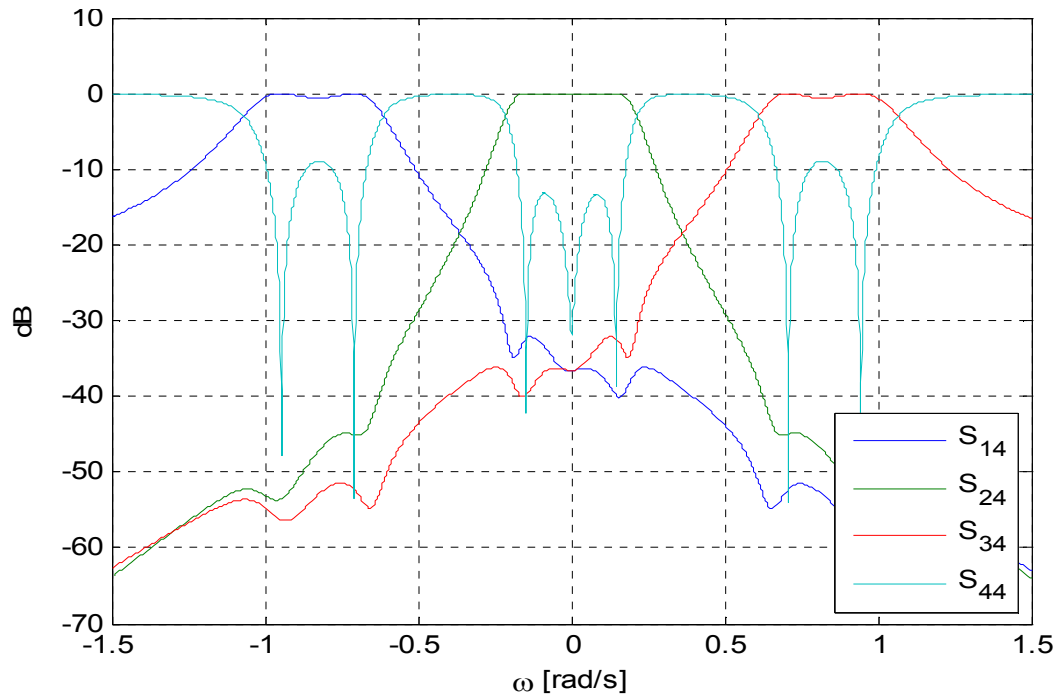


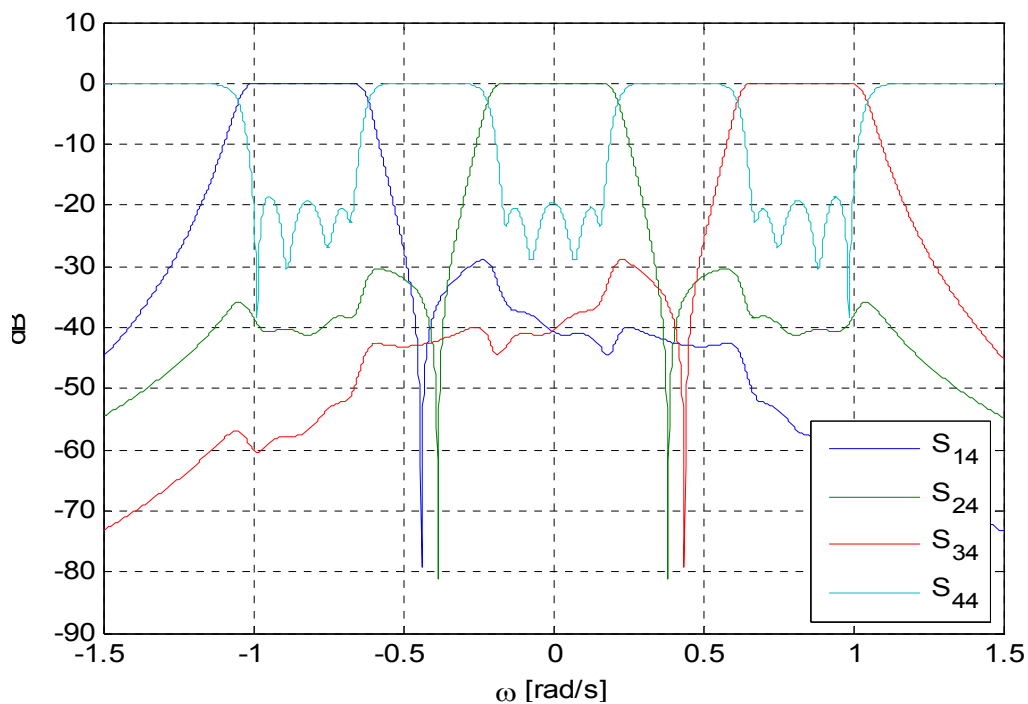
Figura 77: Respuesta de un triplexor usando síntesis analítica tras rotaciones y truncamientos

Por otro lado, la respuesta obtenida usando directamente la síntesis por optimización es la siguiente:



**Figura 78: Respuesta en frecuencia de la síntesis por optimización para un triplexor con unión distribuida**

Utilizando la matriz de acoplamientos obtenida tras las rotaciones y truncamientos, y que ha dado lugar a la respuesta de la figura 77, como punto de partida para la síntesis analítica-optimización se puede observar como la respuesta mejora sensiblemente:



**Figura 79: Respuesta final del triplexor con unión distribuida tras síntesis analítica – optimización**



Como se puede observar en este ejemplo, el resultado de la síntesis analítica-optimización es bastante similar al obtenido usando simplemente la síntesis analítica truncada, ya que aunque este segundo método mejora ligeramente los parámetros de transmisión ( $S_{12}$ ,  $S_{23}$  y  $S_{34}$ ), empeora el valor de rizado del parámetro de reflexión en el puerto común ( $S_{44}$ ). Por lo tanto, se puede concluir que para este caso particular no sería necesario aplicar la síntesis conjunta ya que usando la analítica truncada se obtienen unos buenos resultados y además se evita consumir recursos computacionales adicionales. Sin embargo este nuevo proceso de síntesis conjunto nunca empeorará los resultados, así que podrá ser usado para cualquier caso.

### 4.4.2 Conclusiones

De acuerdo con todo lo visto a lo largo de esta sección se puede concluir que este nuevo proceso de síntesis conjunta (analítica-optimización) proporciona mejores resultados que los obtenidos mediante cada uno de los dos tipos de síntesis usados independientemente.

Por otro lado, algunas veces el resultado de este nuevo método no mejorará sensiblemente respecto al obtenido utilizando la síntesis analítica truncada con lo que cabría pensar si no sería más conveniente usar este procedimiento (sección 4.2) directamente para reducir el coste computacional. Sin embargo y dado que no se va a conocer el resultado a priori, será mejor utilizar este nuevo método de síntesis conjunto (analítica-optimización) para obtener un resultado lo más próximo posible al ideal a pesar de tener como contrapartida un incremento en el tiempo de ejecución.

## 4.5 Conclusiones

De acuerdo con todos los resultados obtenidos a lo largo del capítulo se puede concluir que efectivamente la síntesis analítica (sección 4.2) obtiene la respuesta ideal correspondiente a unas determinadas especificaciones. Sin embargo, las matrices de acoplamiento obtenidas mediante este proceso son transversales y por lo tanto, irrealizables (salvo para algún caso trivial). Las rotaciones de Givens mantienen la respuesta de la red invariante, pero, en general, no son capaces de encontrar una matriz de acoplamientos que satisfaga totalmente una determinada topología, aunque sin embargo, sí que son una buena manera de aproximarse a la solución buscada. Por otro lado, los truncamientos de los coeficientes de la matriz de acoplamiento para adaptarse a la topología especificada distorsionan la respuesta en frecuencia.

Si por el contrario, lo que se desea es, fijada la topología (generalmente realizable), encontrar una respuesta lo más parecida a la ideal se utilizará la síntesis por

optimización (sección 4.3), la cual tratará de encontrar los coeficientes de la matriz de acoplamientos que generen una respuesta lo más parecida posible a la objetivo. Como contrapartida, este método sólo podrá utilizar topologías correspondientes a matrices de acoplamiento previamente calculadas (con los valores de los coeficientes de acoplamientos cercanos a los óptimos) y almacenadas. Si la topología especificada no coincidiese o no se encontrase entre éstas matrices, el resultado sería un proceso de síntesis con una respuesta muy distorsionada.

Por último la combinación de ambos procesos de síntesis en uno sólo, conocido como síntesis analítica-optimización (sección 4.4), y que utilice las ventajas de ambos, será siempre beneficioso para la obtención de una respuesta lo más parecida posible a la objetivo conservando una determinada topología. Además este nuevo método podrá trabajar con cualquier topología que se le especifique (no como la síntesis por optimización en donde sólo era posible trabajar con unas topologías previamente almacenadas), por lo que siempre podrán encontrarse topologías realizables físicamente. Como contrapartida este nuevo proceso tendrá un mayor coste computacional pues deberá utilizar la suma de los recursos consumidos en cada uno de los dos procesos de síntesis anteriores.

# Capítulo 5

## Interfaz de usuario

### 5.1 Introducción

Este capítulo está dedicado a la descripción completa de la interfaz de usuario que interaccionará con el programa principal de síntesis de multiplexores de microondas que se ha estudiado en capítulo anterior (sección 4.1). Esta interfaz es sencilla y de intuitivo manejo y será implementada usando la herramienta GUI (Graphical User Interface) de MATLAB® ya que el programa al que da soporte está implementado en MATLAB®. Adicionalmente se hará uso de una serie de ejemplos para ilustrar su comportamiento mostrando las distintas posibilidades de la aplicación (sección 5.2). Finalmente, se concluirá con algunas reflexiones (sección 5.3).

El programa sobre el que actuará la interfaz es de gran complejidad y puede ser usado para calcular diversos tipos de respuestas dependiendo de las especificaciones. Sin embargo, esta interfaz, sólo representará las opciones más significativas. Al tratarse de una versión 1.0, posiblemente puedan implementarse mejoras en ella en el futuro para explotar, aún en mayor medida, todo el potencial del programa software sobre el que dicho interfaz está implementado.

## 5.2 Funcionamiento general

En primer lugar, el programa ejecutará la interfaz inicial, la cual ofrecerá al usuario la posibilidad de elegir entre usar unos datos completamente nuevos, cargar unos datos anteriormente guardados o usar unos valores típicos (valores por defecto que se suelen usar para los procesos de síntesis de multiplexores de microondas en aplicaciones espaciales).

Adicionalmente también ofrecerá la posibilidad de elegir el número de canales que se usarán para la multiplexación, con un mínimo de 1 (valor por defecto) y hasta un máximo de 10. El multiplexor de microondas estará formado por  $p$  puertos y  $p-1$  canales.

El aspecto que tiene esta interfaz inicial (primera pantalla al ejecutar el programa) es el siguiente:

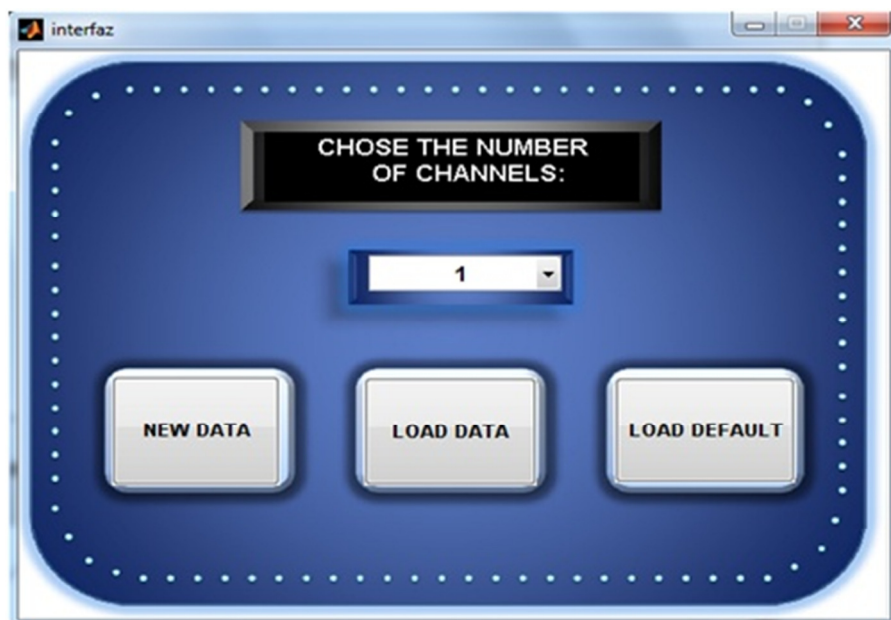


Figura 80: Interfaz principal

Dependiendo de la opción elegida, el funcionamiento de la interfaz variará. A continuación se ilustrará el funcionamiento de cada opción.

### 5.2.1 Opción de datos nuevos

Si el usuario elige la opción de usar unos datos completamente nuevos, esta interfaz inicial le redirigirá a otra que mostrará tantas columnas de campos en blanco como canales se hayan seleccionado en la interfaz inicial (figura 80). Cada columna de campos representa los datos que el usuario debe introducir para cada canal. Dichos campos son los siguientes:

5. Frecuencia central del canal ( $f_0$  en Hz).
6. Ancho de banda de canal (Hz).
7. Valor de rizado del canal (dB).
8. Orden del canal.
9. Posiciones de los ceros de transmisión. (Parte real e imaginaria, no módulo y fase)

Aunque los valores de la frecuencia central y del ancho de banda de canal deberían ser introducidas en Hz, el programa acepta que en ambos campos sean introducidos mediante sus valores normalizados, pero sólo si se introducen en ambos campos simultáneamente, es decir, no sería correcto introducir en un mismo canal una frecuencia central normalizada si el ancho de banda para ese mismo canal está en Hz o viceversa.

Adicionalmente existe un botón adicional que permite, si el usuario así lo desea, especificar la topología que tendrá la matriz de acoplamientos. El programa se encargará de controlar posibles fallos ocasionados por una incorrecta especificación de la topología.

Si por ejemplo, el usuario ha seleccionado 6 canales, el aspecto de esta interfaz será el siguiente:

DATA FOR CHANNEL:	1	2	3	4	5	6
CENTRAL FREQUENCY $f_0$ (Hz):						
BW CHANNEL: (Hz)						
RIPPLE CHANNEL: (dB)						
CHANNEL ORDER:						
TRANSMISSION ZEROS:						

Topology

OK SAVE

Figura 81: Interfaz de nuevos datos para 6 canales

Se puede apreciar como la totalidad de los campos correspondientes a cada uno de los seis canales se encuentran en blanco para que el usuario pueda rellenarlos con los valores que desee.

Los datos de cada canal se encuentran especificados en columnas, por lo que sus diferentes campos podrán variar significativamente entre cada uno de los distintos canales. El usuario deberá introducir todos los datos de cada canal ya que si olvida alguno aparecerá un mensaje de error indicando la causa de éste. Aquellos campos que ocasionen error tomarán el valor cero por defecto. Adicionalmente cada uno de los campos tendrá sus propios valores no permitidos:

1. **Frecuencia central:** Como su propio nombre indica, este dato hace referencia a la frecuencia central de cada canal. Puede ser introducido como un valor absoluto o como un valor normalizado (típicamente se usará la frecuencia central de la banda  $K_u$   $f=10$  GHz o  $f=12$  GHz para la normalización), pero si introducimos este valor normalizado también deberemos introducir el valor del ancho de banda normalizado (usando el mismo valor de normalización), ya que lo importante es la relación relativa.

Si olvidamos introducir la frecuencia central del canal o ponemos un valor que no se corresponde a lo esperado (cadena de caracteres, números complejos, etc), el programa mostrará un mensaje de error y se asignará automáticamente el valor 0 a este campo.

2. **Ancho de banda:** Al igual que sucedía con el campo de la frecuencia central, este campo solamente aceptará valores positivos reales y, en general, se expresará en Hz, aunque también podrá expresarse en valores normalizados (usando las mismas frecuencias de normalización que en el caso de la frecuencia central) si la frecuencia central se encuentra normalizada, ya que lo importante es el ancho de banda relativo.

Típicamente usaremos anchos de banda de hasta 100 MHz aunque a veces se estirará hasta 1 GHz, ya que estos son los valores para los cuales se ha realizado en análisis teórico del programa software sobre el que está implementada la interfaz (valores de 1 GHz son usados para poder comprobar si la aproximación en banda estrecha sigue siendo válida).

Al igual que en el caso anterior, si olvidamos introducir el ancho de banda del canal, o introducimos valores erróneos a los esperados (números complejos o negativos, cadenas de caracteres, etc) se mostrará un mensaje de error especificando el motivo de éste y al campo correspondiente al ancho de banda en cuyo canal se hubiese producido el error se le asignará el valor cero.

3. **Rizado:** Este valor nos servirá para indicar el valor de reflexión de cada canal y será expresado en dB. El usuario deberá tener cuidado de que así sea, ya que si erróneamente introduce un valor en unidades naturales el programa no

mostrará ningún mensaje de error y realizará la simulación para ese valor obteniendo un resultado que no se corresponderá con el esperado.

Si olvidamos introducir el valor de este campo o introducimos valores incorrectos (números complejos, cadenas de caracteres, etc. (Nótese que en este campo sí están permitidos el uso de valores negativos, al contrario que en los dos anteriores)) aparecerá el mensaje de error especificando el motivo de éste y en campo “rizado” para el canal que ha ocasionado el error pasará a tomar el valor cero.

4. **Orden del canal:** Este campo se refiere al número de resonadores usados para el canal especificado y por lo tanto solamente aceptará valores enteros positivos, pero en este caso tendremos dos maneras de diferenciar entre los distintos tipos de errores para ayudar a los usuarios a una rápida detección y corrección de los mismos. En primer lugar, si el usuario olvida introducir el valor de este campo o introduce un valor que no es el esperado (números complejos, cadenas de caracteres, etc.) aparecerá el mismo mensaje de error que en los casos anteriores especificando el motivo de éste y el campo correspondiente al orden del canal con error pasará a tomar el valor cero.

Sin embargo, si el usuario introdujese un valor entero positivo con decimales, el programa truncará dicho valor al entero positivo más próximo pero inferior. Si dicho valor es negativo, el valor asignado será cero, de acuerdo con el indicativo de errores considerado en los campos anteriores. Adicionalmente se mostrará un mensaje de aviso como el siguiente:

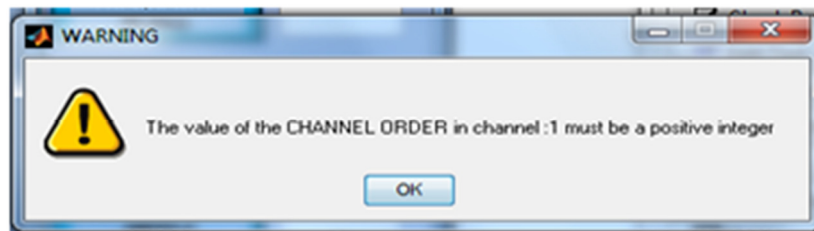


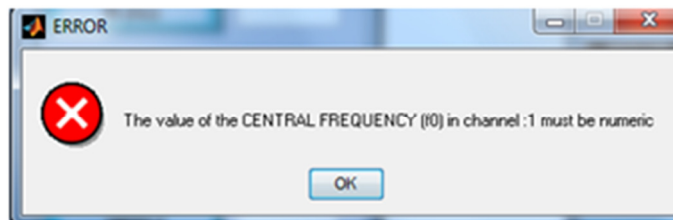
Figura 82: Aviso debido a truncamiento del orden del canal

5. **Ceros de transmisión:** Este campo es diferente a todos los anteriores en el sentido en que en los campos anteriores solamente se podía introducir un solo valor por campo mientras que en este caso podemos introducir varios valores correspondientes a cada uno de los ceros de transmisión del canal, ya que un mismo canal puede tener varios ceros de transmisión, pero solamente una frecuencia central, un determinado ancho de banda, un valor de rizado y un único orden. Además los valores de los ceros de transmisión podrán ser complejos así como decimales. A la hora de introducir valores decimales, se separará la parte entera de la decimal mediante un punto (“.”), por lo que la forma de cada uno de los ceros de transmisión es la siguiente: “ $a.b + c.d \cdot j$ ” ó “ $a.b + c.d \cdot i$ ”.

Si en lugar de usar un punto para separar dichas partes usamos una coma (“,”) ese valor será considerado como erróneo, al igual que si introducimos valores que no sean los esperados (secuencias de letras, signos de puntuación...) y un mensaje de error aparecerá en la pantalla del usuario.

Al igual que en los casos anteriores ante un valor erróneo, el campo correspondiente pasará a asignarse automáticamente al valor cero, pero en lugar de poner todo los campo a cero (valor por defecto), este valor (0) se asignará sólo a aquellos campos en los que se haya producido algún error dejando el resto con los valores asignados anteriormente si estos son correctos.

A modo de ejemplo, y para facilitar la identificación de los mensajes de error, a continuación, se muestra la forma de uno de ellos, en este caso, el correspondiente a un valor erróneo de la frecuencia central, siendo equivalente para los demás casos con la única diferencia en el texto que especifica el error.



**Figura 83: Mensaje de error debido a valor de frecuencia central introducida errónea**

Una vez verificados automáticamente que todos los datos introducidos son correctos el usuario puede proceder a iniciar la síntesis pulsando el botón “OK”. El programa guardará automáticamente los datos bajo un nombre previamente introducido por el usuario si este así lo ha especificado o con un nombre por defecto, que en nuestro caso será el de “*data\_channels.mat*”.

Si por el contrario el usuario tan sólo deseaba introducir los datos de los distintos canales para poder almacenarlos sin ejecutar la simulación, entonces simplemente utilizará el botón de guardar “*SAVE*” para realizar esta operación.

Si pulsamos este botón, el programa nos pedirá especificar la ruta donde deseamos guardar los datos (que por defecto será en la carpeta en la que estamos trabajando) así como el nombre con el que deseamos guardar el archivo de datos, que será de formato “*\*.mat*”. Adicionalmente, antes de guardar los datos, y al igual que en el caso de la simulación, el programa comprobará cada uno de los campos de los distintos canales para comprobar que estos se adaptan a los valores permitidos. De esta forma, nos aseguramos que los datos guardados sean correctos. El usuario, por tanto, verá algo parecido a lo mostrado a continuación:



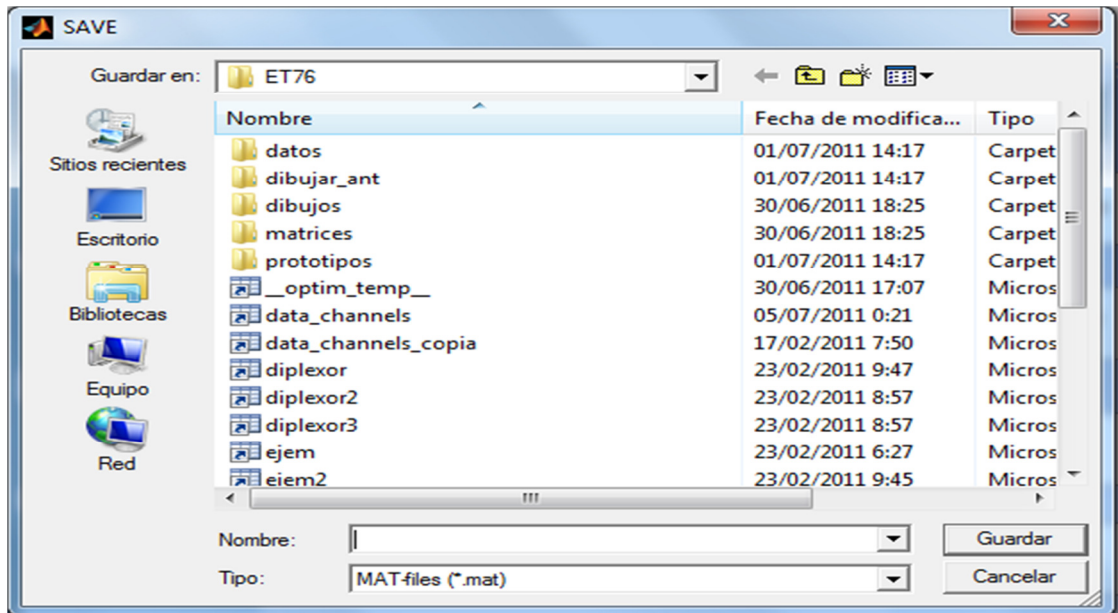


Figura 84: Ruta y nombre a especificar por el usuario para guardar los datos

Una vez finalizada la simulación o el procedimiento para guardar los datos, el programa regresará automáticamente a la interfaz principal con los datos previamente introducidos por el usuario para que éste pueda modificarlos si lo desea y el programa se quedará en estado de espera hasta la realización de la siguiente síntesis o modificación.

## 5.2.2 Opción de cargar datos

Si el usuario elige la opción de cargar unos datos previamente almacenados (botón “LOAD DATA” en el interfaz principal) el programa le pedirá al usuario que introduzca la ruta y el nombre del archivo con los datos que este desea cargar, es decir, aparecerá un esquema como el mostrado a continuación:

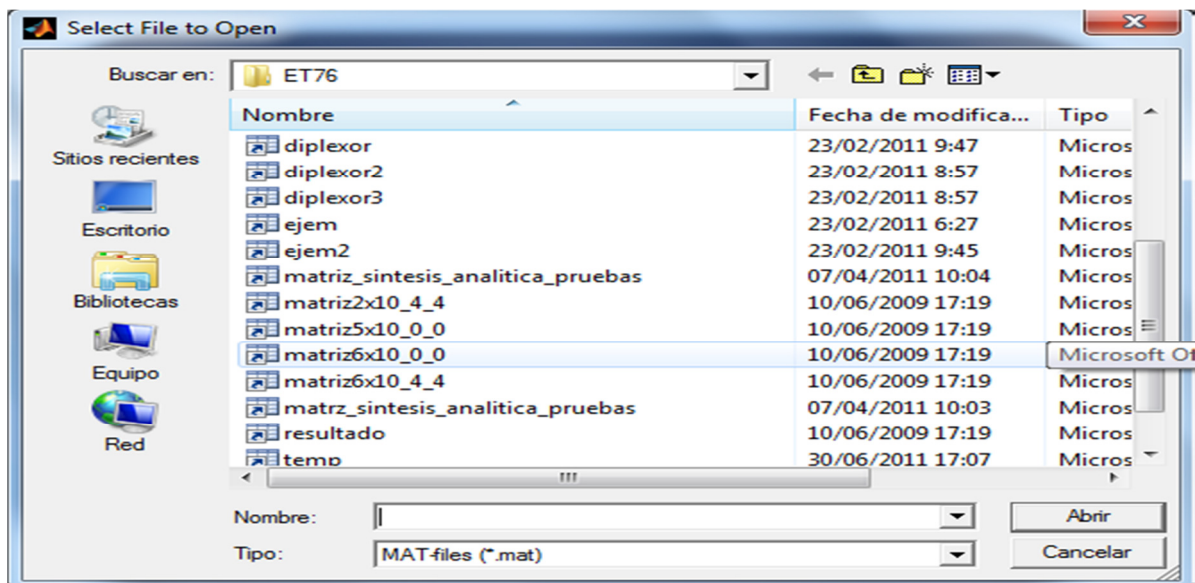


Figura 85: Ruta y nombre del archivo que desea cargar el usuario

Si el archivo introducido contiene datos erróneos aparecerá un mensaje de error por pantalla, al igual que si se intenta cargar un archivo que no sea de formato (“\*.mat”), mientras que si por el contrario los datos introducidos son correctos, éstos se cargarán rellenando todos los campos correspondientes a los canales especificados en la interfaz inicial, es decir, la misma interfaz principal que en el caso anterior, pero con los campos rellenos en lugar de vacíos. Adicionalmente, si el archivo cargado es uno que previamente ha sido guardado usando este programa nos aseguraremos que todos los datos de cada uno de los campos sean correctos, pero, si por el contrario el usuario a creado de forma independiente un archivo de datos (“\*.mat”) con el mismo formato que el usado para el programa no existirá forma de asegurarse de que todos los valores introducidos sean correctos, aunque esto no supondrá ningún problema, ya que a la hora de realizar la síntesis, de sobrescribir o de guardar los nuevos datos se comprobará de forma automática el valor de todos sus campos verificando que estos sean correctos y asignando el valor por defecto (“0”) en el caso de que alguno no lo sea.

Para el caso particular de 6 canales con unos datos previamente almacenados el resultado será similar al mostrado en la siguiente figura:

DATA FOR CHANNEL:	1	2	3	4	5	6
CENTRAL FREQUENCY $f_0$ (Hz):	1.225e+010	1.23e+010	1.235e+010	1.24e+010	1.245e+010	1.25e+010
BW CHANNEL: (Hz)	3e+007	3e+007	3e+007	3e+007	3e+007	3e+007
RIPPLE CHANNEL: (dB)	18	18	18	18	18	18
CHANNEL ORDER:	4	4	4	4	4	4
TRANSMISSION ZEROS:	0+1.8i 0-1.8i	0+1.8i 0-1.8i	0+1.8i 0-1.8i	0+1.8i 0-1.8i	0+1.8i 0-1.8i	0+1.8i 0-1.8i

Buttons: Topology, OK, SAVE

Figura 86: Interfaz rellena con los datos cargados

Una vez cargados los datos antiguos el usuario podrá modificarlos y operar de igual manera que en caso anterior (comenzar la síntesis o guardar los datos modificados).

### 5.2.3 Opción de cargar datos por defecto

Por último la interfaz inicial también ofrece al usuario la posibilidad de realizar la síntesis usando unos valore “típicos” (o valores por defecto), o de simplemente cargar dichos valores para no tener que rellenar todos los campos y dar una idea general de los valores los campos. Los valores por defecto usados son los siguientes:

1. **Frecuencia central:** variarán desde los 12.25 GHz (para el canal 1) hasta los 12.7 GHz (para el canal 10), en saltos de 50 MHz entre cada canal.
2. **Ancho de banda:** El ancho de banda será igual para todos los canales y de 30 MHz, es decir, menor que la separación entre las frecuencias centrales de los canales (50 MHz) para evitar problemas de solapamientos entre bandas contiguas.
3. **Rizado:** El valor de rizado será de 18 dB y será también igual para todos los canales.
4. **Orden:** El orden de canal será 4 para todos los canales, ya que cada canal estará formado por cuatro resonadores
5. **Ceros de transmisión:** tomarán los valores (ya normalizados) de  $1.8j$  y  $-1.8j$ .

La interfaz perteneciente a los valores por defecto será muy parecida a la de la figura 86 con la diferencia de que en este caso se utilizarán los valores por defecto mencionados con anterioridad. Al igual que en los casos anteriores, se lanzarán mensajes de error cuando corresponda si el usuario intenta iniciar la síntesis con valores erróneos en alguno de sus campos.

### 5.2.4 Especificar una nueva topología

Para cada uno de los casos anteriormente vistos, el usuario tendrá la posibilidad de usar una topología por defecto, la cual se calcula a partir de las especificaciones del orden de cada canal y del número de canales, o bien tendrá la posibilidad de especificar su propia topología, mediante la utilización del botón “*Topology*”, el cual muestra al usuario una nueva interfaz que proporciona las herramientas necesarias para poder especificar la topología deseada.

Si el usuario selecciona la opción de introducir nuevos datos (o cualquier otra, pero donde se ha modificada algún campo) esta nueva interfaz sólo será visible si el campo del orden de cada canal es correcto y está completo, ya que este dato es necesario

para el cálculo de las dimensiones de cada una de las submatrices que forman la matriz de acoplamientos completa ( $M$ ), y que a su vez utiliza la interfaz de cálculo de topología para completar su aspecto externo. Así, por ejemplo, para el caso de haber seleccionado dos canales cada uno de orden cuatro, el orden completo de la red ( $n$ ) será la suma de los órdenes de los canales, es decir, en este caso particular,  $4+4=8$ , con lo que la submatriz de resonadores (o de acoplamientos internos,  $M_n$ ) tendrá dimensión  $8 \times 8$ . Como el número de canales es 2, el número de puertos es este mismo dato pero incrementado en una unidad, es decir, número de puertos igual a tres. Por lo tanto las dimensiones de la submatriz de puertos ( $M_p$ ) será de  $3 \times 3$ , y finalmente la dimensión de la submatriz de acoplamientos entre puertos y resonadores será de dimensión  $3 \times 8$  ( $M_{pn}$ ). Todo esto aparece ilustrado en esta interfaz de especificación de una nueva topología tal y como se muestra a continuación:

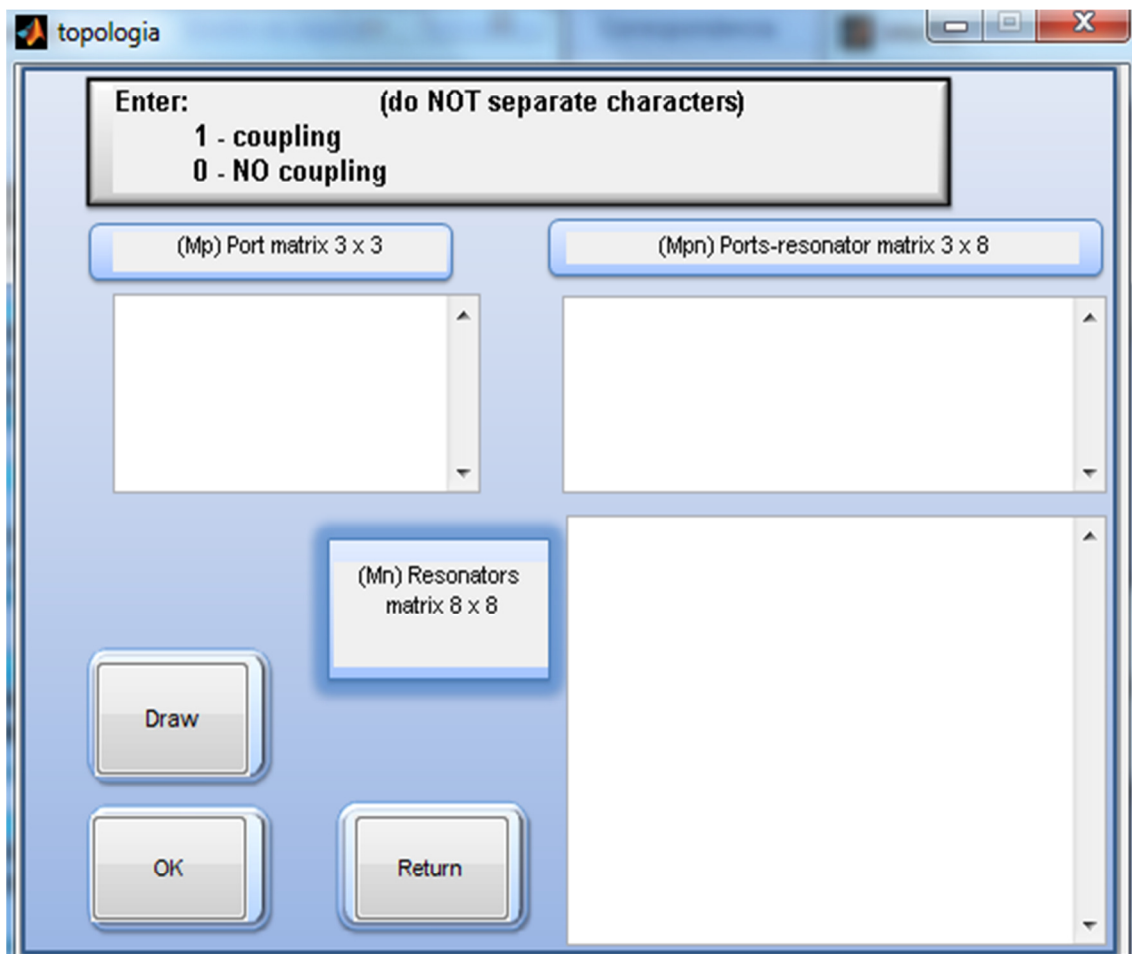


Figura 87: Interfaz para especificar una nueva topología para dos canales de orden cuatro

Como se puede observar en esta interfaz solamente existen tres campos a rellenar por el usuario, que son los correspondientes las submatrices  $M_p$ ,  $M_{pn}$  y  $M_n$ . Sin embargo, de acuerdo con la ecuación (2.109), la matriz de acoplamientos necesita de cuatro submatrices para estar completa. No obstante, una de estas submatrices se corresponde con  $M_{pn}^t$ , por lo que no será necesario que el usuario introduzca también esta matriz traspuesta. Además, de esta manera se evitarán problemas de consistencia que se podrían

ocasionar si el usuario introdujese una submatriz  $M_{pn}^t$  que no se correspondiese con la submatriz  $M_{pn}$  previamente introducida.

Adicionalmente cada uno de los campos de esta nueva interfaz está diseñado de tal modo que si el usuario introduce valores incorrectos (distinto número de filas o de columnas de los necesarios, caracteres incorrectos o de cualquier otro tipo), el programa mostrará un aviso correspondiente a la modificación efectuada mientras que el campo con el error pasará a tomar unos valores por defecto. Estos valores son los siguientes:

- La matriz  $M_p$  será de tamaño  $p \times p$  y se rellanará con todos sus elementos a cero.
- La matriz  $M_n$  tendrá todos sus elementos con valor cero excepto los aquellos coeficientes de la diagonal principal.
- La matriz  $M_{pn}$  tendrá, al menos, una conexión distinta de cero para cada uno de los puertos con al menos un resonador, es decir, al menos existirá un coeficiente distinto de cero en cada una de las filas de esta matriz.

De esta forma nos aseguraremos que la matriz introducida cumpla con las dimensiones y especificaciones.

El botón “*DRAW*”, además de realizar las comprobaciones y correcciones oportunas en cada uno de los campos, representa gráficamente la topología especificada.

El botón de aceptar (“*OK*”) no hace más que comprobar y corregir todos los campos de la topología y luego retornar a la interfaz correspondiente a las especificaciones de todos los canales (figura 81), donde el usuario podrá modificar algún otro campo si así lo desea o comenzar con la simulación.

El botón de “*Return*” simplemente redirige al usuario a la interfaz de especificaciones de los campos de los canales (figura 81) sin utilizar ninguna topología especificada, por lo que para los procesos de síntesis se utilizará una topología calculada automáticamente.

Los resultados de las distintas simulaciones serán similares a los estudiados en las secciones 4.2 y 4.4.

## 5.3 Conclusiones

El objeto de esta interfaz será su uso como herramienta de diseño, y facilitará la interacción del usuario con el programa software sobre el cual está desarrollada y cuya función es la de la síntesis de multiplexores que posteriormente serán usados en aplicaciones espaciales. Dicho programa es de gran complejidad mientras que esta interfaz es de fácil e intuitivo manejo para el usuario.

La interfaz proporciona la posibilidad de utilizar unos valores por defecto si el usuario no conoce los valores de las especificaciones, o de usar unos valores propios si éste así lo desea.

En cualquier caso el programa corregirá el uso de especificaciones erróneas introduciendo y corrigiendo aquellos campos incorrectos para de esta forma asegurarse que los procesos de síntesis se inician con unas especificaciones libres de errores.

Sin embargo, algunos de los errores corregidos por esta interfaz son valores de forma y no de contenido, es decir, podría darse el caso de que las especificaciones introducidas por el usuario cumpliesen con los criterios necesarios para evitar los filtros de corrección de errores, pero que posteriormente esos parámetros diesen lugar a procesos de síntesis erróneos.

Este tipo de problemas se podrían producir si, por ejemplo, el usuario introdujese el valor de rizado en unidades naturales en lugar de en dB, una frecuencia central en Hz mientras que un valor de ancho de banda normalizado o viceversa, etc. Adicionalmente se deberá ser cuidadoso a la hora de elegir los valores de los ceros de transmisión, esto es, existirán determinados valores que podrían producir una respuesta completamente errónea, por lo que será necesario que los usuarios de este programa tengan cierto conocimiento acerca de la síntesis de multiplexores de microondas.

# Capítulo 6

## Epílogo y líneas futuras

En este último capítulo se presentarán las conclusiones finales del proyecto así como las líneas futuras de investigación (sección 6.2).

### 6.1 Conclusiones

La síntesis de multiplexores es un proceso complejo que se lleva cabo en varias etapas y que proporciona como resultado una matriz de acoplamientos. Esta matriz se corresponde con una representación que contiene toda la información relevante de la red, ya que contiene los valores de los coeficientes de acoplamientos así como la topología correspondiente. A partir de esta matriz se podrá obtener la respuesta en frecuencia del multiplexor.

Existen dos procesos distintos de síntesis: la síntesis analítica y la síntesis por optimización, siendo la primera de ellas la que proporcionará la respuesta ideal para las especificaciones proporcionadas, ya que esta síntesis fija la respuesta y obtiene como resultado una matriz de acoplamientos y topología que produzcan esa respuesta. Sin embargo, las matrices de acoplamientos obtenidas a través del proceso de síntesis analítica se corresponderán con topologías transversales, por lo que, salvo algún caso trivial, no serán realizables físicamente. Como lo que se pretende es obtener redes que

puedan ser construidas se necesitará obtener topologías viables y que además cumplan con las especificaciones. Para ello se deberá realizar transformaciones de semejanza de esta matriz que no distorsionen la respuesta en frecuencia, tales como las rotaciones de Givens. No obstante, este tipo de transformaciones no será capaz de obtener redes totalmente realizables ya que, en general, no anularán completamente los coeficientes no deseados, sino que simplemente reducirán su valor en la medida de lo posible. Por este motivo se deberá hacer uso de otras aproximaciones auxiliares como la anulación de coeficientes por debajo de un umbral, o truncamiento de acuerdo con la matriz de topología. El inconveniente de estas últimas operaciones es que se trata de transformaciones que no son de semejanza, por lo que producirán distorsiones en la respuesta en frecuencia final.

Otra opción es usar la síntesis por optimización, la cual permitía realizar el proceso de síntesis sobre topologías realizables a costa de distorsionar la respuesta final. Sin embargo, este proceso tiene el inconveniente de necesitar una base de datos previa con unas matrices de acoplamiento cuyos coeficientes han sido calculados previamente y cercanos a los óptimos para que el proceso de optimización no se estanque en mínimos locales. Si para las especificaciones proporcionadas no existiesen estas matrices de acoplamiento previamente calculadas, el proceso de optimización se podría estancar en mínimos locales sin llegar a encontrar la solución óptima resultando una respuesta en frecuencia muy distorsionada.

Para solventar los dos inconvenientes de cada uno de los procesos de síntesis se ha desarrollado un nuevo método que utiliza las ventajas de ambos métodos, es decir, calcula la matriz de acoplamientos correspondiente a la respuesta objetivo mediante la síntesis analítica, posteriormente trunca la matriz de acoplamientos para obtener una topología realizable y finalmente optimiza esa nueva matriz de acoplamientos truncada mediante la síntesis por optimización, la cual, al tomar como punto de partida una matriz de acoplamientos cercana a la óptima no se estancará en mínimos locales y la optimización se realizará de forma correcta, con lo que será capaz de mejorar sensiblemente la respuesta en frecuencia final. El pequeño inconveniente de este nuevo proceso será un mayor coste computacional, en concreto la suma de los costes de la síntesis analítica y de la síntesis por optimización, pero es un precio bajo en comparación con la mejora obtenida.

El proceso de síntesis de multiplexores, así como el programa que lo implementa son relativamente complicados, por ello se ha desarrollado una interfaz de usuario sencilla que podrá ser usada como herramienta de diseño y que facilitará la interacción del usuario con el programa.

La interfaz proporciona al usuario la posibilidad de utilizar los parámetros que desee, cargar unos previamente guardados o usar unos valores por defecto. Adicionalmente, el programa prevendrá el uso de especificaciones erróneas corrigiendo aquellos campos incorrectos para, de esta forma, asegurarse que los procesos de síntesis se inician con unas especificaciones libres de errores.



Así mismo el usuario podrá introducir la topología deseada, es decir, el modo en el que las conexiones estarán hechas y posteriormente el programa calculará la respuesta obtenida para las especificaciones y topologías proporcionadas.

Adicionalmente se mostrará la respuesta ideal para que el usuario compruebe si la topología especificada distorsiona demasiado la respuesta en frecuencia, en cuyo caso tendrá la posibilidad de especificar otras nuevas topologías. Si por el contrario el usuario no desea introducir ninguna topología el programa calculará una de manera automática y del mismo modo comparará los resultados obtenidos con los ideales, ya que dependiendo de las especificaciones se generarán distintas matrices de topologías.

Finalmente los ejemplos mostrados a lo largo del presente documento muestran el comportamiento general del programa, los resultados de los distintos tipos de síntesis y las representaciones de las topologías, siempre con el objetivo de obtener redes realizables físicamente.

## 6.2 Líneas de trabajo futuras

A lo largo del presente documento se ha podido apreciar como esta interfaz es una versión 1.0, es decir, existe mucha funcionalidad que puede ser añadida o incluso mejorada. A continuación se estudiarán algunas de ellas.

### 6.2.1 Construcción de topologías realizables físicamente

Como se ha podido observar a lo largo del capítulo 4 correspondiente a los distintos procesos de síntesis, el método de construcción de topologías de manera automática, así como el encargado de la simulación física, no es capaz de obtener siempre una solución realizable. Adicionalmente podrían existir ciertos casos en que sí que sería posible obtener una solución, mientras que el programa no es capaz de hallarla. Por lo tanto, éste podría ser un punto de mejora, pero para ello primero de debería implementar un algoritmo, que en primer lugar, fuese capaz de realizar todas las combinaciones posibles de reordenamiento de nodos y puertos para una topología previamente especificada e ir comprobando si esa distribución y numeración es válida o no, y en caso afirmativo detener el proceso, mostrando la red obtenida, para saber si ésta se adaptan o no a las especificaciones del usuario.

Dado que existen  $n$  resonadores y  $p$  puertos existirán  $(n! \cdot p!)$  formas posibles de distribuir los resonadores y puertos a lo largo del espacio físico. Esto implica que existirá un número realmente alto de combinaciones posibles para efectuar las reordenaciones y distribuciones.

Para evitar el consumo innecesario de recursos computacionales, también sería conveniente el desarrollo de otro algoritmo que dado un cierto número de acoplamientos, puertos y resonadores, fuese capaz de determinar si la topología que se obtendría pudiese ser realizable físicamente o no. Esto simplificará mucho la computación ya que este análisis no implicará el intento de construcción de todas las redes, sino que relacionará el número total de acoplamientos, con el de puertos y resonadores y obtendrá directamente como resultado si la red podrá ser realizable o no.<sup>3</sup>

Una vez obtenida una respuesta afirmativa, el programa invocará al primer algoritmo (que calcula todas las reordenaciones y distribuciones de puertos y resonadores) para obtener la red final realizable. Adicionalmente este primer algoritmo, buscarán aquellas redes más estructuradas dentro de las topologías realizables, ya que éstas, en general, serán más sencillas de implementar físicamente. Para ello se sustituirán, en la medida de lo posible, las líneas curvas por rectas y siguiendo una estructura lo más uniformemente distribuida posiblemente.

Si por el contrario, este segundo algoritmo determina que para los números de acoplamientos, puertos y resonadores especificados, no es posible encontrar una topología realizable, por muchas transposiciones y reordenaciones que se realicen, existirán varias alternativas:

1. La primera opción será advertir al usuario de que para las especificaciones proporcionadas no es posible obtener una topología realizable, instándole a modificar dichas especificaciones.
2. La segunda opción será la de advertir al usuario de que la red no será realizable, pero construir una red con el menor número de cruces posibles, intentando, en la medida de lo posible, acercarse al límite ideal de la realizabilidad (cero cruces).
3. La tercera opción, como las dos primeras advertirá de la imposibilidad de la construcción de la red, pero construirá una topología realizable eliminando el menor número de acoplamientos respecto a los especificados que permitan obtener un diagrama de nodos y acoplamientos realizable. Ésta opción distorsionará la respuesta en frecuencia final.
4. Otra opción será la de ofrecer la opción de realizar una síntesis por optimización, en lugar de una síntesis analítica utilizando alguna topología (y matriz de acoplamientos) ya existentes, pero si el usuario decidiese no usar este tipo de síntesis se procedería de acuerdo con la tercera opción.

---

<sup>3</sup> Este problema fue abordado como una primera instancia con los teoremas de Kuratowski y Euler en la sección 3.5 correspondiente al diseño de grafos planos.

### **6.2.2 Mejora del interfaz de construcción de topologías**

Como se ha visto en la sección 5.2.4 la interfaz correspondiente a la especificación de topologías (figura 87) es un tanto rudimentaria, ya que el usuario deberá poseer cierto grado de conocimientos para ver la relación entre la matriz de acoplamientos y la topología.

Es importante notar que puede darse el caso de que el usuario tenga clara la distribución física de nodos y acoplamientos, pero no su matriz de acoplamientos, por ello esta nueva versión de la interfaz dispondrá de un panel con puertos, resonadores y líneas que representarán los distintos tipos de acoplamientos para que el usuario los pueda ir distribuyendo a lo largo de un layout físico el cual solamente permitirá conectar aquellos acoplamientos que no produzcan cruces con los ya existente. Esto implicará que las topologías especificadas serán siempre válidas. Una vez especificado el diagrama de nodos y acoplamientos a lo largo del espacio físico, el programa calculará de manera automática la topología correspondiente y que será la usada en los distintos procesos de síntesis.



# Capítulo 7

## Presupuesto

En este último capítulo se incluye el presupuesto total del proyecto, desglosado en sus diferentes secciones.

En primer lugar y dado que el proyecto se ha desarrollado usando la herramienta de software de MATLAB® 2010, hay que considerar el precio de este programa, el cual ronda los 2000 €. El resto del gasto ha sido principalmente el ocasionado por la dedicación del personal.

En la figura 88 aparece representado el diagrama de Gantt con las diferentes tareas realizadas durante los 13 meses de duración del proyecto. Por otra parte en la página siguiente al diagrama de Gantt, se desglosan detalladamente los costes que ha supuesto la realización del proyecto, así como su importe total.

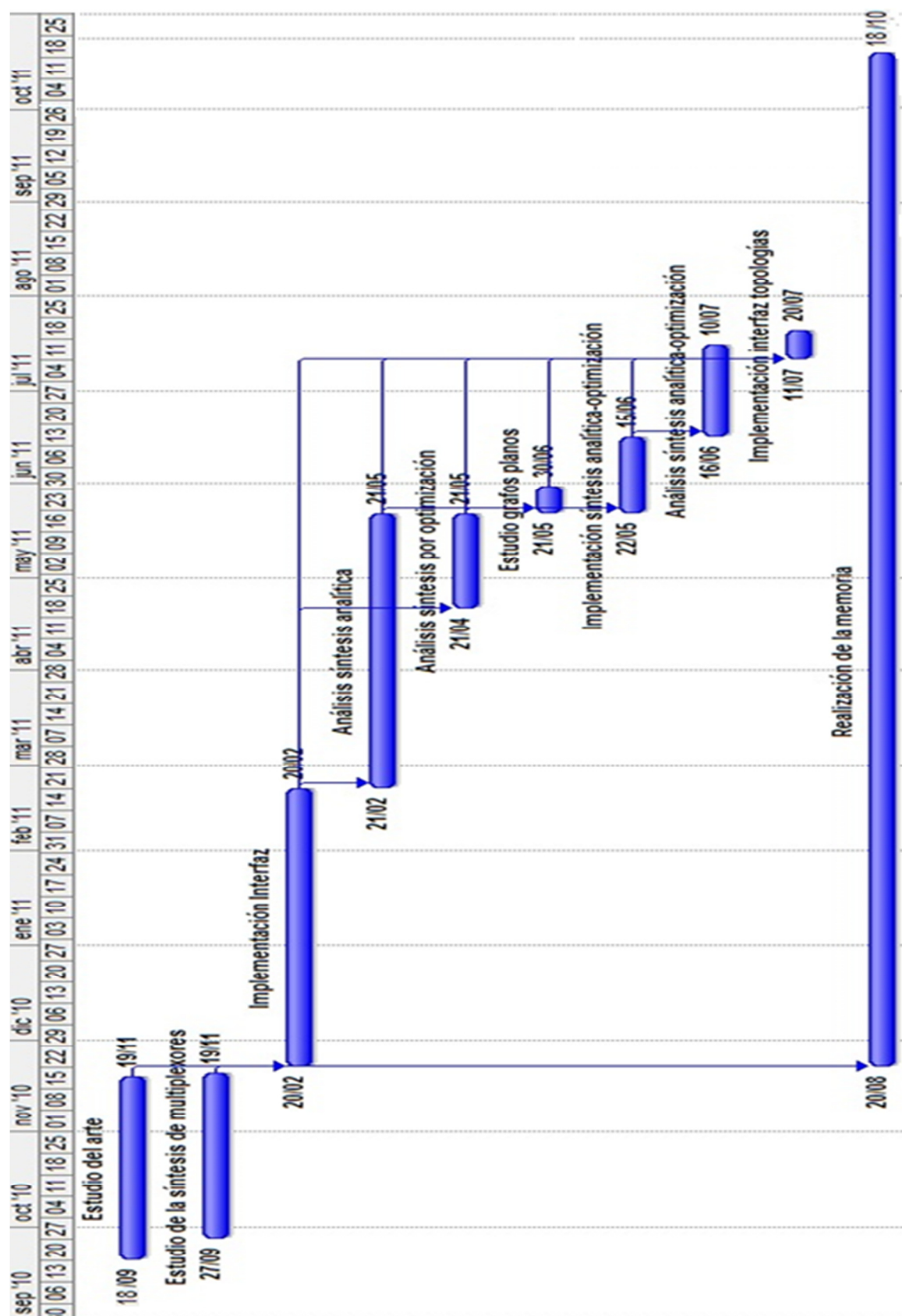


Figura 88: Diagrama de Gantt del proyecto de Síntesis de multiplexores de microondas

**1.- Autor:** Jaime Noé Benito Casado

**2.- Departamento:** Teoría de la Señal y Comunicaciones

**3.-Descripción del proyecto:**

- Título: Interfaz de usuario de software de síntesis de multiplexores de microondas para aplicaciones espaciales.
- Duración (meses): 13
- Tasa de costes indirectos: 20% (incluye transportes y gastos extras).

**4. Presupuesto total del proyecto (valores en Euros):**

28.089,17 Euros

**5. Desglose presupuestario (costes directos)**

PERSONAL						
Apellidos y nombre	N.I.F	Categoría	Dedicación (hombres mes) <sup>(a)</sup>	Coste hombre mes	Coste (Euro)	Firma de conformidad
Benito Casado, Jaime Noé	-	Ingeniero	7,92	2.694,39	21.349,83	
García Lampérez, Alejandro	-	Ingeniero Senior	0,396	4.289,54	1.699,47	
<b>Hombres mes:</b>			<b>7,04</b>	<b>Total:</b>	<b>23.049,30</b>	

<sup>(a)</sup>1 Hombre mes = 131,25 horas. Máximo anual de dedicación de 12 hombres mes (1575 horas)  
Máximo anual para PDI de la Universidad Carlos III de Madrid de 8,8 hombres mes (1.155 horas)

EQUIPOS					
Descripción	Coste (Euro)	% Uso dedicado	Dedicación (meses) <sup>1</sup>	Periodo de depreciación	Coste imputable <sup>(d)</sup>
Ordenador	500,00	100	11	60	91,67
Licencia MATLAB ®	2.000,00	100	8	60	266,67
<b>Total:</b>					<b>358,34</b>

<sup>(d)</sup>Fórmula de cálculo de la Amortización

$$\frac{A}{B} \times C \times D$$
 A = nº de meses desde la fecha de facturación en que el equipo es utilizado  
 B = periodo de depreciación (60 meses)  
 C = coste del equipo (sin IVA)  
 D = % del uso que se dedica al proyecto (habitualmente 100%)

SUBCONTRATACIÓN DE TAREAS		
Descripción	Empresa	Coste imputables
-	-	0
<b>Total:</b>		<b>0</b>

OTROS COSTES DIRECTOS DEL PROYECTO <sup>(e)</sup>		
Descripción	Empresa	Coste imputables
-	-	0
<b>Total:</b>		<b>0</b>

<sup>(e)</sup> Este capítulo de gastos incluye todos los gastos no contemplados en los conceptos anteriores, por ejemplo: fungible, viajes y dietas, otros,...

## **6. Resumen de costes:**

Presupuesto Costes Totales	Presupuesto Costes
Personal	23.049,30
Amortización	358,34
Subcontratación de tareas	0
Costes de funcionamiento	0
Costes indirectos	3970,51
<b>TOTAL</b>	<b>28.089,17</b>

Se concluye finalmente que el presupuesto total de este proyecto asciende a la cantidad de 28.089,17 Euros.

Leganés a 28 de Octubre de 2011

El ingeniero proyectista

Fdo. Jaime Noé Benito Casado



# Bibliografía

- [1] A. García Lampérez, Ph.D. “*Métodos avanzados de síntesis y optimización de filtros y multiplexores de microondas*”. 2004.
- [2] A. García Lampérez, PFC. “*Herramienta de diseño de filtros paso banda deresonadores con topologías de acoplo generalizadas*”. Oct, 2000.
- [3] Grupo de Radiofrecuencia, UC3M. “filtros en microondas”, *Microondas y circuitos de alta frecuencia*, Sept. 2009
- [4] D. M. Pozar, “*Microwave Engineering*”. 2<sup>nd</sup> ed. pp 422-496. John Wiley & Sons, Inc, 1998.
- [5] R.E. Collin: “*Foundations for Microwave Engineering*”. 2<sup>nd</sup> ed. pp 550-647. Ene. 1992.
- [6] G.I. Matthaei, L. Young, E.M.T. Jones: “*Microwave Filters, Impedance Matching Networks, and coupling structures*”. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964.
- [7] R.J. Cameron, "Advanced coupling matrix synthesis techniques for microwave filters", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol 51, pp. 1-10, Jan 2003.
- [8] R.J. Cameron, "General coupling matrix synthesis methods for Chebyshev filtering functions", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol 47, pp. 433-442, Apr 1999.
- [9] A.E. Atia and A.E. Williams, "New types of bandpass filters for satellite transponders", *COMSAT Tech. Rev.*, vol 1, no. 1, pp. 21-43, Fall 1971.
- [10] \_\_\_, "Advanced coupling matrix synthesis techniques for microwave filters," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 51, no. 1, pp. 1-10, Ene. 2003.
- [11] A. E. Atia y A. E. Williams, “Narrow-bandpass waveguide filters,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 20, pp. 258-265, Abr. 1972.
- [12] G. Macchiarella, “A powerful tool for synthesis of prototype filters with arbitrary topology”, en *2003 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, vol. 3, Jun. 2003. pp 1467-1470.
- [13] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, 2<sup>nd</sup> ed. John Wiley & sons, 2000.

- [14] A. García Lampérez, M. Salazar Palma, M. J. Padilla Cruz, y I. Hidalgo Carpintero, "Synthesis of cross-couples lossy resonator filters with multiple input/output couplings by gradient optimization," en *Proceedings of the 2003 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, Columbus, OH, EEUU, Jun. 2002, pp. 52-55.
- [15] J. Seop Lee, "Microwave resonator filters for advanced wireless systems". Phd. Univeristy of Michigan. 2009.
- [16] Depto. de Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad de Murcia. "Teoría de grafos". Disponible en web: <http://ocw.um.es/ingenierias/algebra-y-matematica-discreta/lectura-obligatoria-1/apuntes5.pdf> [último acceso, 5 de Octubre de 2011].
- [17] Orlando Arboleda Molina, "*Grafos planos*", Sept, 2008. Disponible en web: [http://eisc.univalle.edu.co/materias/Matematicas\\_Discretas\\_2/pdf/planos\\_grafos\\_07.pdf](http://eisc.univalle.edu.co/materias/Matematicas_Discretas_2/pdf/planos_grafos_07.pdf)[último acceso, 5 de Octubre de 2011].
- [18] J. García de Jalón. "*Matrices de Proyección, Reflexión y Rotación. Mínimos Cuadrados. Factorización QR*". Oct, 2002. Disponible en web: [http://mat21.etsii.upm.es/matesp/clases/clases0203/clase09/MatProyRefIRot\\_6.pdf](http://mat21.etsii.upm.es/matesp/clases/clases0203/clase09/MatProyRefIRot_6.pdf) [último acceso, 5 de Octubre de 2011].
- [19] G.L. Matthael. L. Young and E.M.T. Jones. "Microwave filters. Impedance-matching networks and coupling structures", McGraw Hill. New York, 1984.
- [20] A. García Lampérez, T.K. Sarkar, y M. Salazar Palma, "Efficient electromagnetic optimization microwave filters and multiplexers using rational models," *IEEE Microwave Wireless Compon, Lett.*, vol. 14, no. 10, Oct 2004.